МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»

Фонд оценочных средств

по учебной дисциплине

«ОП.01 Элементы высшей математики»

программы подготовки специалистов среднего звена

по специальности

09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта

(базовой подготовки)

Ростов-на-Дону

2026г.

РАССМОТРЕНО
На заседании цикловой комиссии
математических е естественнонаучных
дисциплин
Протокол № 1 от 31.08.2026 года
Председатель ЦК Джалагония М.Ш.

УТВЕРЖДАЮ:
Зам. директора по УМР
И.В. Подцатова
«16» ноября 2026 г.

Фонд оценочных средств разработан на основе рабочей программы учебной дисциплины **«ОП.01 Математический аппарат в отрасли информационных технологий»,** разработанной в 2026г по специальности 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта

Разработчик:
Ю.М. Путинцева – преподаватель ГБПОУ РО «РКСИ»
Рецензент:
М.Ш. Джалагония– преподаватель ГБПОУ РО «РКСИ»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке
3. Оценка освоения учебной дисциплины
4. Контрольно-оценочные материалы для промежуточной аттестации по учебной дисциплине.

Приложения. Задания для оценки освоения дисциплины

1. Паспорт фонда оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины **«ОП.01 Элементы высшей математики»,** обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС СПО по специальности СПО 09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта со следующими умениями и знаниями

Код ОК, ***ПК***	**Уметь**	**Знать**	**Владеть навыками**
ОК.01	- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте, анализировать и выделять её составные части - определять этапы решения задачи, составлять план действия, реализовывать составленный план, определять необходимые ресурсы - выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы - владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах - оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника)	- актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить - структура плана для решения задач, алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях - основные источники информации и ресурсы для решения задач и/или проблем в профессиональном и/или социальном контексте - методы работы в профессиональной и смежных сферах - порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности	-

ОК.02	- определять задачи для поиска информации, планировать процесс поиска, выбирать необходимые источники информации - выделять наиболее значимое в перечне информации, структурировать получаемую информацию, оформлять результаты поиска - оценивать практическую значимость результатов поиска - применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач - использовать современное программное обеспечение в профессиональной деятельности - использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач	- формат оформления результатов поиска информации формат оформления результатов поиска информации современные средства и устройства информатизации, порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности, в том числе цифровые средства	-
ОК.03	определять актуальность нормативно-правовой документации в профессиональной деятельности применять современную научную профессиональную	содержание актуальной нормативно-правовой документации современная научная и профессиональная терминология возможные траектории профессионального	

	терминологию определять и выстраивать траектории профессионального развития и самообразования выявлять достоинства и недостатки коммерческой идеи определять инвестиционную привлекательность коммерческих идей в рамках профессиональной деятельности, выявлять источники финансирования презентовать идеи открытия собственного дела в профессиональной деятельности определять источники достоверной правовой информации составлять различные правовые документы находить интересные проектные идеи, грамотно их формулировать и документировать оценивать жизнеспособность проектной идеи, составлять план проекта	развития и самообразования основы предпринимательской деятельности, правовой и финансовой грамотности правила разработки презентации основные этапы разработки и реализации проекта	
ОК.04	организовывать работу коллектива и команды взаимодействовать с	психологические основы деятельности коллектива	

	коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности	психологические особенности личности	
ОК.05	грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке проявлять толерантность в рабочем коллективе	правила оформления документов правила построения устных сообщений особенности социального и культурного контекста	
ОК.06	проявлять гражданско-патриотическую позицию демонстрировать осознанное поведение описывать значимость своей специальности применять стандарты антикоррупционного поведения	сущность гражданско-патриотической позиции традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений значимость профессиональной деятельности по специальности стандарты антикоррупционного поведения и последствия его нарушения	

Формой аттестации в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине «ОП.01 Элементы высшей математики», является экзамен.

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

2.1. В результате аттестации по учебной учебной дисциплине «ОП.01 Элементы высшей математики», осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний:

Таблица 1

Результаты обучения	**Показатели освоенности компетенций**	**Методы оценки**
Знает: - актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить - структура плана для решения задач, алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях - основные источники информации и ресурсы для решения задач и/или проблем в профессиональном и/или социальном контексте - методы работы в профессиональной и смежных сферах	Демонстрирует знания основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, основы дифференциального и интегрального исчисления; основы теории комплексных чисел.	Экспертное наблюдение выполнения практических работ

- порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности - номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности - приемы структурирования информации - формат оформления результатов поиска информации - современные средства и устройства информатизации, порядок их применения - программное обеспечение в профессиональной деятельности, в том числе цифровые средства -содержание актуальной нормативно-правовой документации -современная научная и профессиональная терминология возможные траектории профессионального развития и самообразования -основы предпринимательской деятельности, правовой и		

финансовой грамотности -правила разработки презентации основные этапы разработки и реализации проекта - психологические основы деятельности коллектива - психологические особенности личности - правила оформления документов - правила построения устных сообщений - особенности социального и культурного контекста -сущность гражданско-патриотической позиции традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений -значимость профессиональной деятельности по специальности стандарты антикоррупционного поведения и последствия его нарушения		

Умеет: - распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте, анализировать и выделять её составные части - определять этапы решения задачи, составлять план действия, реализовывать составленный план, определять необходимые ресурсы - выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы - владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах - оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника) - определять задачи для поиска информации, планировать процесс поиска, выбирать необходимые источники информации - выделять наиболее значимое в перечне информации, структурировать получаемую информацию, оформлять результаты поиска - оценивать практическую значимость результатов поиска - применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач	Демонстрирует умения выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости, определять предел последовательности, предел функции применять методы дифференциального и интегрального исчисления, для решения практических задач, решать дифференциальные уравнения.	Экспертное наблюдение выполнения практических работ

- использовать современное программное обеспечение в профессиональной деятельности - использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач -определять актуальность нормативно-правовой документации в профессиональной деятельности -применять современную научную профессиональную терминологию -определять и выстраивать траектории профессионального развития и самообразования -выявлять достоинства и недостатки коммерческой идеи определять инвестиционную привлекательность коммерческих идей в рамках профессиональной деятельности, выявлять источники финансирования презентовать идеи открытия собственного дела в профессиональной деятельности -определять источники достоверной правовой информации -составлять различные		

правовые документы находить интересные проектные идеи, грамотно их формулировать и документировать -оценивать жизнеспособность проектной идеи, составлять план проекта - грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке - проявлять толерантность в рабочем коллективе - проявлять гражданско-патриотическую позицию - демонстрировать осознанное поведение - описывать значимость своей специальности - применять стандарты антикоррупционного поведения - проявлять гражданско-патриотическую позицию демонстрировать осознанное поведение -описывать значимость своей специальности применять стандарты антикоррупционного поведения		

3. Оценка освоения учебной дисциплины:

3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные рабочей программой по дисциплине «ОП.01 Элементы высшей математики».

Технология оценки знаний и умений по дисциплине соответствует Положению о формах, периодичности и порядке проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ГБПОУ РО «РКСИ».

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 2

Таблица 2

Элемент учебной дисциплины	**Текущий контроль**		**Промежуточная аттестация**	
	Форма контроля (по темам)	**Проверяемые ОК, ПК**	**Форма контроля (**по разделам**)**	**Проверяемые ОК, ПК**
Раздел 1. Элементы линейной алгебры			**Экзамен**	
Тема 1.1 Матрицы и определители	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06** .

Тема 1.2. **Системы линейных** **уравнений**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Раздел 2. Элементы аналитической геометрии			**Экзамен**	
Тема 2.1. **Векторы и действия с ними**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Тема 2.2. **Аналитическая геометрия на плоскости**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**

Раздел 3 Комплексные числа			**Экзамен**	
Тема 3.1. Комплексные числа	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Раздел 4. Основы математического анализа			**Экзамен**	
Тема 4.1. **Теория пределов.**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Тема 4.2. **Дифференциальное исчисление функций**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуаль*	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**

одной действительной переменной	*ный)* Оценка выполнения практического задания(работы)			
Тема 4.3. **Интегральное исчисление функций одной действительной переменной**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Тема 4.4. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Тема 4.5. **Интегральное**	*Устный опрос(фронтальный и*	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04;**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04;**

исчисление функций нескольких переменных	*индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК.05; ОК 06**		**ОК.05; ОК 06**
Тема 4.6. **Теория рядов**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**
Тема 4.7. **Обыкновенные дифференциальные уравнения**	*Устный опрос(фронтальный и индивидуальный)* Оценка выполнения практического задания(работы)	**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**		**ОК 01; ОК 02; ОК 03; ОК 04; ОК.05; ОК 06**

3.2. Задания для оценки освоения учебной дисциплины

3.2.1. Задания для оценки знаний и умений в ходе проведения текущего контроля

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1

Матрицы и определители

Практическое занятие №1

Действия с матрицами. Вычисление определителей. Элементарные преобразования матрицы.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научиться выполнять линейные операции над матрицами, умножать матрицы, находить определители второго и третьего порядка. Научиться находить обратные матрицы.

Теоретическая часть

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу также можно записать вкратце $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ – номер строки, $j = \overline{1,n}$ – номер столбца, a_{ij} называются *элементами* матрицы, элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ.

Если число строк и столбцов равны (т.е. m=n), то матрица называется *квадратной:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, содержащая одну столбец или один строку, называется *вектором* (их также называют *вектор-столбец и вектор-строка* соответственно):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Если строки данной матрицы поменять на столбцы с тем же номером, то получим так называемую *транспонированную* матрицу. Например, если $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, по $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix}$.

Действия над матрицами.

Сложение. Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица

$C=(c_{ij})$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$. Следует отметить, что складывать можно только матрицы одинаковых размеров.

Свойства сложения матриц:

1. A+B=B+A (коммутативность).
2. (A+B)+C=A+(B+C) (ассоциативность).

Умножение на число. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число k, называется матрица $B=(b_{ij})$, где $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$

Свойства умножения матриц на число:

1. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$ (ассоциативность).
2. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\beta\cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).
3. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).
4. *(A+B)C=AC+BC или A(B+C)= AB+AC. (*распределительное относительно суммы матриц)

Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение $\alpha\cdot A+\beta\cdot B$, где α,β --произвольные числа.

Умножение матриц. Умножать можно матрицы, в которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Свойства умножения матриц.

1. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B\cdot C$ (ассоциативность).

2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ (дистрибутивность).
3. Произведение матриц АВ не всегда равно произведению матриц ВА— (отсутствие коммутативности)

Коммутативными называются матрицы А и В, если АВ=ВА.

Каждой квадратичной матрице $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно сопоставить число detA, которое называется определителем или детерминантом и вычисляется следующим образом:

- Определителем второго порядка, соответствующим матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$
- Определителем третьего порядка, соответствующим матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель третьего порядка можно также вычислить по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот.
2. При перестановке двух параллельных строк (или столбцов) определитель меняет знак.
3. Определитель, имеющий два одинаковых столбца или строку, равен нулю.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.
5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляет сумму слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

6. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженное на любое число.
7. Определитель равен сумме произведения элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.
8. Сумма произведения элементов какого-либо ряда определителя на алгебраическое дополнение соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Практическая часть

Пример 1. Найдите линейную комбинацию 3A-4B, если

$$A=\begin{pmatrix}4&1&5\\-5&2&-4\\1&7&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-8&2\\2&2&0\\-4&5&3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$3A-4B=3\cdot\begin{pmatrix}4&1&5\\-5&2&-4\\1&7&0\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&-8&2\\2&2&0\\-4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&3&15\\-15&6&-12\\3&21&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-32&8\\8&8&0\\-16&20&12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12-(-4)&3-(-32)&15-8\\-15-8&6-8&-12-0\\3-(-16)&21-20&0-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&35&7\\-23&-2&-12\\19&1&-12\end{pmatrix}$$

Пример 2. Найдите произведения AB (если это возможно):

а) $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&4&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-1\\1&2\\2&5\end{pmatrix}.$ б) $A=\begin{pmatrix}1&4&0\\2&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&1&4\\5&8&-5\end{pmatrix}.$

в) $A=\begin{pmatrix}1&-5&5\\8&5&6\\7&-6&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&-5\\8&4&7\end{pmatrix}$

Решение. а) Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, поэтому выполнить произведение AB возможно и оно равно:

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot4+0\cdot1+1\cdot2&2\cdot(-1)+0\cdot2+1\cdot5\\-3\cdot4+4\cdot2+4\cdot5&-3\cdot(-1)+4\cdot2+4\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&3\\16&31\end{pmatrix}$$

б) $$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+4\cdot2+0\cdot5&1\cdot1+4\cdot1+0\cdot8&1\cdot2+4\cdot4+0\cdot(-5)\\2\cdot(-1)+(-1)\cdot2+1\cdot4&2\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot8&2\cdot2+(-1)\cdot4+1\cdot(-5)\\1\cdot(-1)+2\cdot2+1\cdot5&1\cdot1+2\cdot1+1\cdot8&1\cdot2+2\cdot4+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&18\\0&9&-5\\8&11&5\end{pmatrix}$$

в) Произведение АВ невозможно, т.к. число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй матрицы ($3 \neq 2$).

Пример 3. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - (-8) \cdot 5 = 35 + 40 = 75$

б) 1 способ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= -80 - 20 + 0 - 0 + 25 - 24 = -99$$

2 способ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-26) - 5 \cdot (-1) + 0 = 99.$$

.

Миноры и алгебраические дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-него порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного путём вычеркивания строки и столбца, на пересечений которых находится данный элемент. Минор обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма i+j четная и со знаком «минус», если эта сумма нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

С помощью алгебраического дополнения можно вычислить определитель n-го порядка:

$detA=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n-1}A_{1n-1}+a_{1n}A_{1n}$

Обратная матрица.

Квадратная матрица называется *невырожденной,* если ее определитель не равен нулю, т.е. $\det A \neq 0$. В противном случае матрица А называется *вырожденной.*

Матрицей, обратной квадратной матрице А называется матрица A^{-1}, такая, что $A^{-1}A=E$, где Е—*единичная* матрица.

Если матрица А невырожденная, то

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T$, где A^T --транспонированная матрица к матрице А.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Найти определитель матрицы. (Если detA=0, то обратной матрицы не существует).
2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы.
3. Записать транспонированную матрицу $(A_{ij})^T$.
4. Найти по формуле обратную матрицу.
5. Сделать проверку.

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размера $m \times n$. Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересече-нии выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы А.

Среди всех отличных от нуля миноров матрицы А найдется, по крайней мере, один минор, порядок которого будет наибольшим. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы. Если ранг матрицы А равен *r*, то это означает, что в матрице А имеется отличный от нуля минор порядка *r*, но всякий минор порядка, большего, чем *r*, равен нулю. Ранг матрицы А обозначается через r(A). Очевидно, что выполняется соотношение

$$0 \le r(A) \le \min(m, n)$$

Ранг матрицы можно найти методом элементарных преобразований.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов),

2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число,

4) вычеркивание нулевой строки.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так:

A ~ B.

Матрица имеет ступенчатый вид, если в каждой ее строке стоит нулей больше, чем в предыдущей. При этом учитываются лишь нули, стоящие в начале строки до первого ненулевого числа.

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы после приведения ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Практическая часть

Пример 1. Найдите матрицу, обратную к данной:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix};$ б) $A=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{pmatrix}.$

Решение. а) Решаем по алгоритму:

1. $$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=7-0-30=-23$$

т.к. $23\neq 0$, то A^{-1} существует.

2. Алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-(-1)=7,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(6+4)=-10,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-8=-6,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(0-5)=5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3-20=-17,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0-10=-10,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1-10)=11,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-0=2.$$

3. Матрица A_{ij} имеет вид:

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -6\\ 5 & -17 & -1\\ -10 & 11 & 2\end{pmatrix}$$. Транспонируем ее: $$(A_{ij})^T=\begin{pmatrix}7 & 5 & -10\\ -10 & -17 & 11\\ -6 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

4. Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{-23}\begin{pmatrix}7 & 5 & -10\\ -10 & -17 & 11\\ -6 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{23} & -\frac{5}{23} & \frac{10}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{17}{23} & -\frac{11}{23}\\ \frac{6}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{2}{23}\end{pmatrix}$$

5. Делаем проверку:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{7}{23} & -\frac{5}{23} & \frac{10}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{17}{23} & -\frac{11}{23}\\ \frac{6}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{2}{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

б) Найдем определитель матрицы $$A=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{pmatrix}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{vmatrix}=40-40=0$$ $$\det A=\begin{vmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{vmatrix}=40-40=0$$. Матрица вырожденная, следовательно, матрица A^{-1} не существует.

Пример 2. Найти ранг матрицы $$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3\\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

Решение. Приведем матицу к ступенчатому виду. Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки: $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2\\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$$.Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5: $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\end{pmatrix}$$; из второй строки

вычтем третью; получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы B равен 2, а следовательно, и r(A)=2.

Ответ: r(A)=2.

Практические задания

Даны две матрицы A и B.

1. Найдите: а) линейную комбинацию матриц 2A+3B-E, где E – единичная матрица.
2. матрицу, обратную матрице A.

Вариант 1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
Вариант 3 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 4 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 5 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	Вариант 6 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
Вариант 7 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 8 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 10 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
3 заданий		отлично
2 заданий		хорошо
1 заданий		удовлетворительно
менее 1 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие №2

Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научиться находить обратные матрицы, ранг матрицы методом элементарных преобразований.

Теоретическая часть

Миноры и алгебраические дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij}определителя n-него порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного путём вычеркивания строки и столбца, на пересечений которых находится данный элемент. Минор обозначается $M_{ij.}$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма i+j четная и со знаком «минус», если эта сумма нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

С помощью алгебраического дополнения можно вычислить определитель n-го порядка:

$detA=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n-1}A_{1n-1}+a_{1n}A_{1n}$

Обратная матрица.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\det A \neq 0$. В противном случае матрица А называется вырожденной.

Матрицей, обратной квадратной матрице А называется матрица A^{-1}, такая, что $A^{-1}A=E$, где Е—единичная матрица.

Если матрица А невырожденная, то

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^T$, где A^T --транспонированная матрица к матрице А.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Найти определитель матрицы. (Если detA=0, то обратной матрицы не существует).
2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы.
3. Записать транспонированную матрицу $(A_{ij})^T$.
4. Найти по формуле обратную матрицу.
5. Сделать проверку.

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размера $m \times n$. Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересече-нии выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы А.

Среди всех отличных от нуля миноров матрицы А найдется, по крайней мере, один минор, порядок которого будет наибольшим. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы. Если ранг матрицы А равен r, то это означает, что в матрице А имеется отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего, чем r, равен нулю. Ранг матрицы А обозначается через r(A). Очевидно, что выполняется соотношение

$$0 \le r(A) \le \min(m, n)$$

Ранг матрицы можно найти методом элементарных преобразований.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов),

2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число,

4) вычеркивание нулевой строки.

Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так:

A □ B.

Матрица имеет ступенчатый вид, если в каждой ее строке стоит нулей больше, чем в предыдущей. При этом учитываются лишь нули, стоящие в начале строки до первого ненулевого числа.

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы после приведения ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Практическая часть

Пример 1. Найдите матрицу, обратную к данной:

а) $A=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&2&-1\\4&1&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5&10\\4&8\end{pmatrix}$.

Решение. а) Решаем по алгоритму:

1. $\det A=\begin{vmatrix}1&0&5\\2&2&-1\\4&1&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix}=7-0-30=-23$

т.к. $23\neq 0$, то A^{-1} существует.

2. Алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=6-(-1)=7,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}=-(6+4)=-10,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix}=2-8=-6,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&5\\1&3\end{vmatrix}=-(0-5)=5,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&5\\4&3\end{vmatrix}=3-20=-17,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\4&1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&5\\2&-1\end{vmatrix}=0-10=-10,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&5\\2&-1\end{vmatrix}=-(-1-10)=11,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}=2-0=2.$

3. Матрица A_{ij} имеет вид:

$A_{ij}=\begin{pmatrix}7&-10&-6\\5&-17&-1\\-10&11&2\end{pmatrix}$. Транспонируем ее: $(A_{ij})^T=\begin{pmatrix}7&5&-10\\-10&-17&11\\-6&-1&2\end{pmatrix}$

4. Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{-23}\begin{pmatrix}7 & 5 & -10\\ -10 & -17 & 11\\ -6 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{23} & -\frac{5}{23} & \frac{10}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{17}{23} & -\frac{11}{23}\\ \frac{6}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{2}{23}\end{pmatrix}$$

5. Делаем проверку:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{7}{23} & -\frac{5}{23} & \frac{10}{23}\\ \frac{10}{23} & \frac{17}{23} & -\frac{11}{23}\\ \frac{6}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{2}{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

б) Найдем определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{pmatrix}$.

$\det A=\begin{vmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{vmatrix}=40-40=0$ $\det A=\begin{vmatrix}5 & 10\\ 4 & 8\end{vmatrix}=40-40=0$. Матрица вырожденная, следовательно, матрица A^{-1} не существует.

Пример 2.Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3\\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$

Решение.
Приведемматицукступенчатомувиду.Извторойстрокивычтемпервуюипереставимэтистроки: $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2\\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5\end{pmatrix}$.Теперь извторой и третьей строки вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5: $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\end{pmatrix}$; из второй строки вычтем третью; получим матрицу $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, которая эквивалентна матрице A, таккакполученаизнееспомощьюконечногомножестваэлементарныхпреобразований. Очевидно, что ранг матрицы B равен 2, а следовательно, и r(A)=2.

Ответ: r(A)=2.

Практические задания

Даны матрицы A и B. Найдите:

a) матрицу, обратную матрице A.
b) Ранг матрицы B

Вариант 1 $A=\begin{pmatrix}4&1&5\\1&2&2\\-5&4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&7&2&-4\\1&9&6&-7\\2&8&-8&1\\1&3&-6&2\end{pmatrix}$	Вариант 2 $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\3&-4&1\\2&2&-6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2&1&3&0\\-4&-2&2&-3&3\\3&5&-2&-1&1\end{pmatrix}$
Вариант 3 $A=\begin{pmatrix}-4&1&4\\1&3&1\\2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\2&-3&3&3\\-1&0&0&-2\\-4&4&1&-2\end{pmatrix}$	Вариант 4 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&0&2\\-5&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&6&3&-2\\-3&1&0&2&1\\5&-3&3&1&4\end{pmatrix}$
Вариант 5 $A=\begin{pmatrix}-1&1&5\\2&4&3\\3&-2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-2&4&-2&1\\2&3&3&3&2\\1&-3&-5&1&-2\end{pmatrix}$	Вариант 6 $A=\begin{pmatrix}1&-3&10\\0&1&2\\6&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&-3&2&-1\\3&3&-4&3&2\\-2&-4&1&-4&3\end{pmatrix}$
Вариант 7 $A=\begin{pmatrix}2&4&11\\4&-2&12\\5&10&-6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&-1&2&0\\3&1&-2&1&4\\2&4&-4&-4&3\end{pmatrix}$	Вариант 8 $A=\begin{pmatrix}10&1&-8\\3&-6&1\\2&2&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&-4&2&3\\1&-4&1&2&2\\2&-3&1&4&1\end{pmatrix}$
Вариант 9 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&0\\3&4&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&3&4&1\\3&3&7&-3&-1\\-4&-2&4&2&-4\end{pmatrix}$	Вариант 10 $A=\begin{pmatrix}1&0&15\\-3&2&1\\-2&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1&0&2\\3&2&2&3\\4&1&3&-2\\-2&-3&-4&1\end{pmatrix}$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
2 заданий		отлично
1задания		хорошо
менее 1 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие №3

Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель: Научиться решать системы уравнений по правилу Крамера, методом Гаусса.

Теоретическая часть

1. *Правило Крамера.*

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + |\ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы единственное решение, и несовместное, если она не имеет ни одного решения. Если система уравнений совместна, то корни можно найти по *формуле Крамера:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,\ldots, n.$$

В этих формулах Δ--определитель системы, а Δ_i—определитель, полученный из определителя системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

При этом нужно помнить, что

а) если $\Delta \neq 0$,то система имеет единственное решение.

б) если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$,то система имеет бесконечное множество решений.

в) если $\Delta = 0,\ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2 \neq 0$, то система не имеет решений.

3. Метод Гаусса.

Данный метод называется и методом исключения неизвестных.

Алгоритм решения:

- Составить расширенную матрицу $(A|b)$
- С помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду;
- Составить соответствующую систему уравнений;
- Решить уравнения, начиная с последнего.

Пример 1. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5x + y = 9, \\ 15x + 3y = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдём определители $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0. \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 1 = 26; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 135 = -130;$$

Мы имеем дело со случаем 3, следовательно, система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

Решение. Формулы Крамера имеют вид:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2, , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$x = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, z = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение. Выпишем расширенную матрицу*:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ *Поменяем местами первую и вторую строчки*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строчку на –2 и вычтем со второй строчкой, результат запишем на место второй строчки, а первую строчку перепишем без изменения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Первую строчку умножим на -3 и сложим ее с третьей строчкой и результат запишем вместо третьей строчки, первую и вторую строчки оставим без изменения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x - y + 4z = 3, \\ 5y - 7z = -7, \\ z = 1; \end{cases}$$

Решаем уравнения, начиная с последнего

z=1; $5y - 7 = -7, y = 0$; $x - 0 + 4 = 3,$ $x = -1.$

Ответ: (-1;0;1).

Практические задания

Решите систему уравнений (1): а) по формулам Крамера;

Решите систему уравнений (2): а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса

Вариант 1	Вариант 2
1) $\begin{cases} 2x - 8y = 8, \\ 5x + y = -2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ -3x + y + 2z = 0, \\ x + 4y + 3z = 2. \end{cases}$	1) $\begin{cases} 5x - 3y = 1, \\ 5x + 11y = 43. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ 2x + y + z = 3, \\ x + y + z = 5. \end{cases}$
Вариант 3	Вариант 4
1) $\begin{cases} -4x - 7y = 1, \\ 5x + 3y = -7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y + z = -4, \\ -x - 2y + 2z = 14, \\ 4x + 2y + z = 7. \end{cases}$	1) $\begin{cases} 9x + 3y = 42, \\ 5x - 7y = 32. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - z = 1, \\ x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 2z = 1. \end{cases}$
Вариант 5	Вариант 6
1) $\begin{cases} 6x + 8y = 10, \\ -3x + y = -8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ -2x + y + z = 3, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$	1) $\begin{cases} x - 5y = 8, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$
Вариант 7	Вариант 8
1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 4x + 2y = 22. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$	1) $\begin{cases} x - 6y = -1, \\ 7x - 2y = 13. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$
Вариант 9	Вариант 10

1) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ 6x+5y=-2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+z=5, \\ 2x+y+z=6, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$	1) $\begin{cases} 3x-5y=8, \\ 4x+y=11. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=6, \\ 3x_1+x_2-2x_3=2, \\ 2x_1-x_2+x_3=1. \end{cases}$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
2 заданий		отлично
1заданий		хорошо
менее 1 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 2.1.

Тема 2.1. Векторы и действия с ними

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Проверочная работа

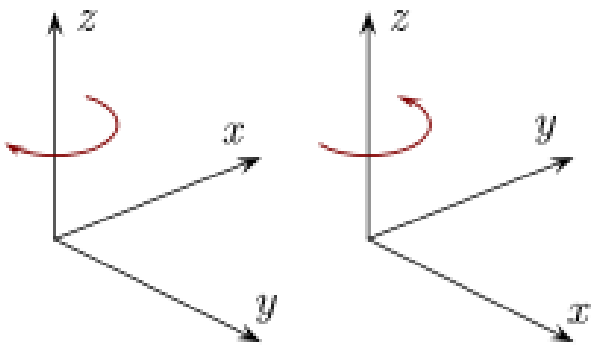
Цель: научиться вычислять векторное и смешанное произведения векторов.

Краткая теория

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Декартовы координаты в трехмерном пространстве (*левая* (на рисунке слева) и *правая* (справа) декартовы системы координат (левый и правый базисы). Принято по умолчанию использовать правые базисы (это общепринятое соглашение, если только какие-то особые причины не заставляют от него отойти — и тогда это оговаривается явно).



Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, который определяется тремя условиями:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарные векторы.

2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

4. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - правая, со знаком «–», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - левая. Если же $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

Практические задания для аудиторной работы

1. Даны векторы $\vec{a}$ = (2;5;7) и $\vec{b}$ = (1;2;4). Найти координаты векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$.
2. Вершины треугольника находятся в точках A(-1;2;-1), B(-3;1;1) и C(0;4;-3). Найдите площадь этого треугольника.
3. В пространстве даны четыре точки: A(1;1;1), B(4;4;4), C(3;5;5) и D(2;4;7). Найти объем тетраэдра ABCD.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вершины треугольника находятся в точках A(-2;4;2), B(-4;0;1) и C(0;2;-1). Найдите площадь этого треугольника.
2. Векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).
2. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Вариант 3

1. Вершины треугольника находятся в точках A(0;5;1), B(-2;0;3) и C(4;1;-1). Найдите площадь этого треугольника.
2. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1,1,1), B(2,0,2), C(2,2,2)$ и $D(3,4,-3)$ вычислить высоту $h = \left|\vec{DE}\right|$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1), B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.
2. Векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ совпадают с ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найдите объем параллелепипеда и площадь его грани, построенной на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение правой и левой тройки векторов.
2. Что такое векторное произведение векторов?
3. Какими свойствами обладает векторное произведение векторов?
4. Дайте определение смешанного произведения векторов.
5. В чем геометрический смысл смешанного произведения векторов?

Тема 2.2.

Аналитическая геометрия на плоскости

Практическое занятие №4.

Уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научиться составлять уравнение прямой по заданным условиям, исследовать взаимное расположение прямых, находить угол между прямыми, решать геометрические задачи.

Теоретическая часть

В аналитической геометрии *линия на плоскости* определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. Важный класс линий составляют те, для которых функция $F(x,y)$ есть многочлен от двух переменных, в этом случае линия, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, называется *алгебраической*. Алгебраические линии, задаваемые уравнением первой степени, есть прямые. Уравнение второй степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или линию, распадающуюся на две прямые.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Прямая на плоскости может быть задана одним из уравнений:

1^0. *Общее уравнение прямой:*

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Вектор $\vec{n}$ (A,B) ортогонален прямой, числа A и B одновременно не равны нулю.

Частные случаи:

1) При A=0 имеем: $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}$. Положим $-\frac{C}{B} = b$, получим y=b -- прямая параллельна оси *Ox* (рис.1)

2) При B=0 имеем: $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}$ Положим $-\frac{C}{A} = a$, получим $x = a$ - прямая параллельна оси *Oy* (рис.2)

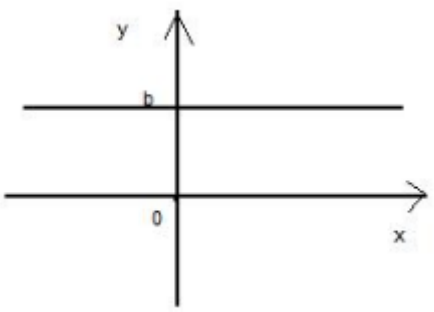


Рис. 1.

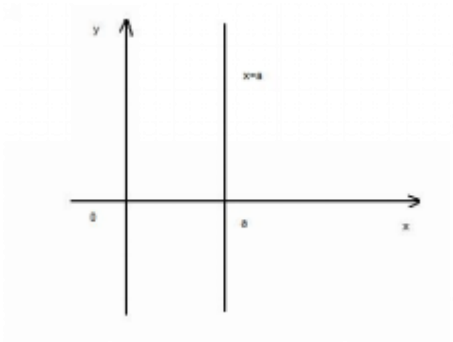


Рис. 2.

3) При C=0 имеем: $Ax + By = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x$ или $y = kx$ где $k = -\frac{A}{B}$ – прямая проходит через начало координат; k – угловой коэффициент прямой. Он равен тангенсу углу наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

$k = tg\alpha$.

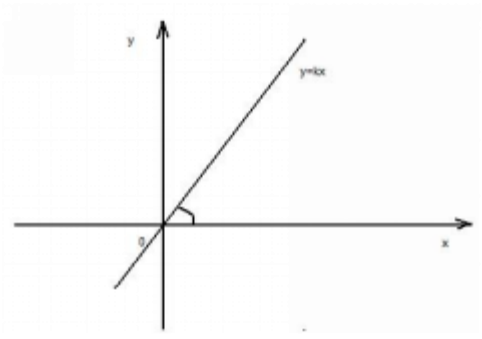


рис.3.

4) При A=C=0, то $y = 0$ - ось *Ox*;

α

5) При B=C=0, то $x = 0$ - ось *Oy*.

2^0. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом:*

$$y - y_o = k\,(x - x_o), \qquad (2)$$

где k - угловой коэффициент прямой, $M(x_o,y_o)$ - некоторая точка, принадлежащая прямой.

3^0. *Уравнение прямой в отрезках:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

где *a*, *b* – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат

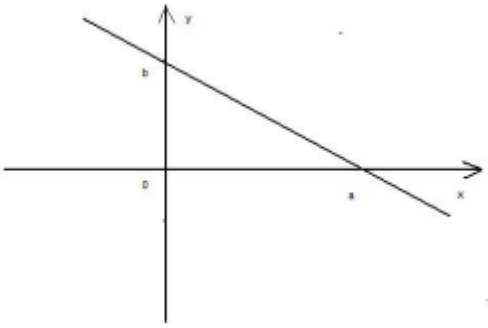


Рис.4

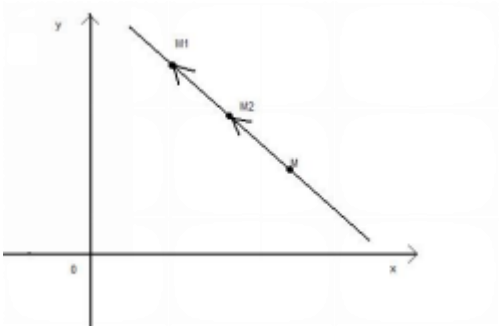


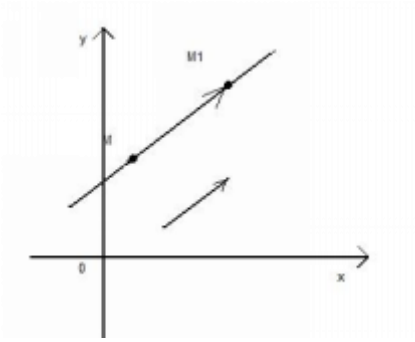
Рис.5.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* - $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, где $y_2 \neq y_1, x_2 \neq x_1$.

Возьмем произвольную точку M(x;y) на прямой (рис.. Т.к. точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой, то векторы $\vec{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ и $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ коллинеарные. А из условия коллинеарности следует:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

5^0. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1)$ параллельно данному вектору* $\vec{a}(m;n)$.



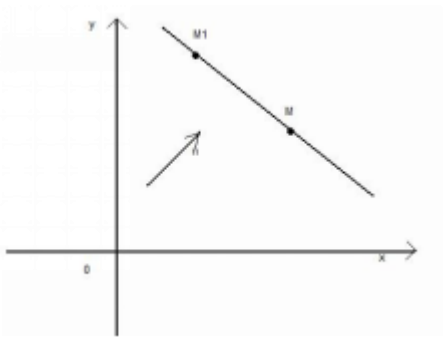


Рис. 6 рис.7

На данной прямой возьмем произвольную точку M(x;y) (рис.6). Рассмотрим вектор $\vec{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$. Т.к. векторы $\vec{a}(m,n)$ и $\vec{M_1M}$ коллинеарные, то имеем:

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m} . \qquad (5)$$

6^0. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1)$ с заданным нормальным вектором* $\vec{n} = (A; B)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (6)$$

Данное уравнение отражает условие перпендикулярности векторов $\vec{n} = (A; B)$ и $\vec{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ (рис. 7).

Величина угла между прямыми $y = k_1x+b$ и $y = k_2x+b_2$ задается формулой:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| .$$

Если даны общие уравнения прямых, то угол между ними находим по формуле

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}\right| = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} , \qquad (7)$$

где $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ --нормальные векторы прямых.

Взаимное расположение прямых:

Пусть даны уравнения прямых

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (8)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad (9)$$

Прямые (8) и (9) *параллельны*, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ или $k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$

пересекаются, $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $k \neq k_2$

задают одну и ту же прямую $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ или $k_1 = k_2, b_1 = b_2$

перпендикулярны $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ или $k_1 k_2 = -1$

Практическая часть

Пример 1. Треугольник АВС задан координатами вершин А(-2;2), В(3;4), С(-2;-3). Составьте уравнения стороны АВ, медианы СМ, высоты АН.

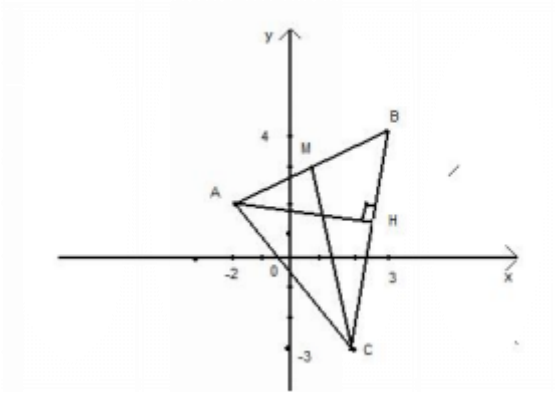


Рис.8

Решение. Построим треугольник АВС. Проведем высоту АН и медиану СМ

Уравнение стороны АВ: Используем формулу (4). $x_1=-2$, $x_2=3$, $y_1=2$, $y_2=4$.

Имеем: $\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-2}{4-2}$,

$\frac{x+2}{5} = \frac{y-2}{2}$, $2x+4=5y-10$, $2x-5y+14=0$.

Уравнение медианы СМ: Найдем координаты середины отрезка АВ – т. М(x;y).

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = 0{,}5 \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки М(0,5;3) и С(-2;-3):

$$\frac{x-0,5}{-2-0,5}=\frac{y-3}{-3-3}, \qquad \frac{x-0,5}{-2,5}=\frac{y-3}{-6},$$

-6x+3=-2,5y+5, -6x+2,5y-2=0, 12x-5y+4=0.

Уравнение высоты: воспользуемся формулой (6). В данном случае нормальный вектор $\vec{n}=\vec{BC}=(-5;-7)$, т.е. A=-5, B=-7, а x_1=-2, y_1=2. Имеем

-5(x+2)-7(y-2)=0, -5x-10-7y+14=0, 5x+7y-4=0.

Ответ: 2x-5y+14=0, 12x-5y+4=0, 5x+7y-4=0.

Пример 2. При каком значении параметра *t* прямые, уравнения которых 2t*x*-4*y*+3 = 0 и (1+t)*x*-t*y* = 0, параллельны?

Решение. Прямые, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при *x* и *y* пропорциональны, т.е.

$$\frac{2t}{1+2t}=\frac{-4}{-t},$$

$-2t^2=-4-8t$, $2t^2-8t-4=0$, $2t^2=8t-4$ $t^2-4t+4=0$, t=2.

3t/(1+t) = -8/(-2t). Решая полученное уравнение, находим *t*: t_1 = 2, t_2 = -2/3.

Ответ: t_1 = 2, t_2 = -2/3.

*Пример 3.*Найдите острый угол между прямыми 2*x*-3*y*+6= и 3*x*-*y*-3=0.

Решение. За угол между прямыми возьмем угол их нормальными векторами. Воспользуемся формулой (7). $\vec{n_1}=(2;-3), \vec{n_2}=(3;-1)$

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\,\vec{n}_2}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{|2\cdot3+(-3\cdot(-1))|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{13\cdot10}}\approx0,79$$

$\varphi\approx\arccos 0,79$

Ответ: $\arccos 0,79$

Пример 4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(4;-2) перпендикулярно прямой *y*=3*x*-5.

*Решение. З*апишем данное уравнение в общем виде: 3*x*-*y*-5=0. Вектор $\vec{n} = (3;-1)$ является для искомой прямой направляющей. Воспользуемся (7) .

$\frac{y+2}{-1} = \frac{x-4}{3}$ 3*y*+6=-*x*+4, *x*+3*y*+2=0.

Ответ: x+3y+2=0.

Практическая работа

1. Задан треугольник АВС. Составить уравнения стороны АВ, медианы АМ и высоты АН.
2. Найдите угол между данными прямыми.
3. Исследовать взаиморасположение двух прямых на плоскости

Вариант 1	**Вариант 2**
1. A(2;3), B(-2;3), C(0;5). 2. 3x+2y-1=0 и 5x-y+4=0. 3. Пары прямых: *y - 5x - 8 = 0 и y - 5x + 8 = 0* *y - 4x - 7 = 0 и 4y + x + 20 = 0* *y - 3x - 4 = 0 и 3y - 9x - 12 = 0* *y - 6x -10 = 0 и y - 11x + 2 = 0*	1. A(2;-1), B(4;2), C(0;1). 2. 3x-2y+0,1=0 и 2x+3y-5=0. 3. Пары прямых: *2y - 5x -8 = 0 и 4y -10x -10 = 0* *y + 2x - 7 = 0 и 2y - x + 20 = 0* *y - 5x -10 = 0 и y - x + 10 = 0* *3y - 9x -12 = 0 и 5y -15x - 20 =0*
Вариант 3	**Вариант 4**
1. A(1;0), B(5;7), C(4;5). 2. x-2=0 и x-y+1=0. 3. Пары прямых: *2y - 6x - 8 = 0, 3y - 9x -12 = 0* *2y + 8x - 7 = 0, 4y - x + 20 = 0* *y - 6x -10 = 0, 3y -11x + 2 = 0* *2y - 5x -18 = 0, 4y -10x +18 = 0*	1. A(2;-1), B(-2;4), C(5;7). 2. 3x-4y-8=0 и 8x+6y+5=0. 3. Пары прямых: *2y + 8x - 5 = 0, 4y - x + 20 = 0 2y - 3x - 8 = 0, 3y – 4,5x -12 = 0 3y - 6x -10 = 0, 3y -10x + 2 = 0* *2y - 5x -18 = 0, 6y -15x +18 = 0*

Вариант 5	**Вариант 6**
1. A(-10;2), B(-4;1), C(6-3). 2. 4x-3y+8=0 и 3x+4y-15=0. 3. Пары прямых: *y + 4x - 7 = 0, y - 8x + 20 = 02y – 2y-7x - 8 = 0, 3y – 10,5x -12 = 0* *y - 4x -10 = 0, 3y -12x -30 = 0* *2y - 5x -18 = 0, 5y +2x +18 = 0*	1. A(12;1), B(5;-1), C(-4;5). 2. 2x-5y-1=0 и 4x+3y+2=0. 3. Пары прямых: *-3y+ 8x-17=0, 4y -x +2 =0* *y - 6x -10 = 0, 4y -24x -40 = 0 5y - x -18 = 0, 4y +20x +18 = 0 2y - 6x -7 = 0, 5y - 15x -12 = 0*
Вариант 7	**Вариант 8**
1. A(2;-1), B(-3;4), C(5;7). 2. 2x-3y+5=0 и 3x+2y-7=0. 3. Пары прямых: *3y + 4x - 7 = 0, 4y - 3x + 20 = 0* *2y - 5x - 8 = 0, 3y - 9x -12 = 0* *y - 7x -10 = 0, 3y -21x + 2 = 0* *2y - 5x -18 = 0, 4y -10x -36 = 0*	1. A(-2;3), B(-5;7), C(-4;2). 2. 2x-3y+10 и 5x-y+4=0. 3. Пары прямых: *-2y + 5x - 7 = 0, 4y - 3x + 2 = 0* *2y - 5x = 0, 3y – 7,5x -2 = 0* *y - 4x -10 = 0, 2y -8x - 20 = 0* *y - 5x -18 = 0, y +0,2x -36 = 0*
Вариант 9	**Вариант 10**
1.A(2;5), B(-4;5), C(11;2). 2.3x+5y-7=0 и 2x-4y+5=0. 3.Пары прямых : *8y + 3x - 7 = 0, 4y +1,5x + 20 = 0* *2y - 5x - 8 = 0, 5y – 12,5x -20 = 0* *y - 7x -10 = 0, 3y -21x + 21 = 0* *2y - 3x -18 = 0, 4y -6x -36 = 0*	1.A(-2;5), B(-7;1), C(6;2). 2.x-2y+5=0 и 3x-y+4=0. 3.Пары прямых: *3y - 4x +2 = 0, 4y +3x + 20 = 0* *2y - 5x - 8 = 0, 8y - 9x -12 = 0* *4y - 7x -1 = 0, 8y -14x - 2 = 0* *2y - 5x -18 = 0, 4y -10x = 0*

Контрольные вопросы:

1.Дайте определение линии на плоскости.
2.Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
3.Запишите в общем виде уравнение прямой, проходящей через начало координат.
4.Как выглядит уравнение прямой в отрезках? Общее уравнение?
5.Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.

6.Сформулируйте условие параллельности прямых.
7.Как найти угол между прямыми?

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
5 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
3 заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие № 5.

Исследование и построение кривых второго порядка.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научиться исследовать и строить кривые второго порядка.

Теоретическая часть

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y, уравнениями вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где A, B, C одновременно не равны нулю, называются кривыми второго порядка.

1. Окружность. Простейшей кривой второго порядка является окружность.

Окружностью называется множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки A этой же плоскости на одно и тоже расстояние R>0. Точка A называется центром окружности, а d-радиусом окружности.

Общее уравнение окружности с центом $A(x_{0;}y_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

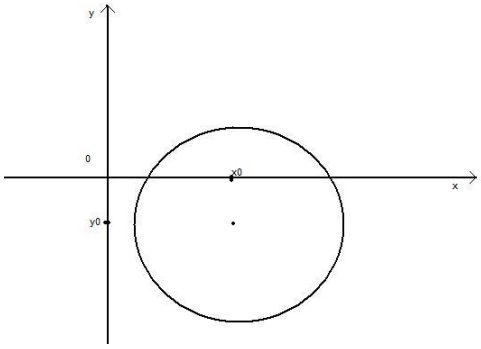


Рис.1

В частности, если центр находится в т.О(0;0), то уравнение (1) примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

2. Эллипс. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояния от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

каноническим уравнением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ a>0, b>0} \qquad (3)$$

Если a>b, то a--большая полуось, b—малая полуось эллипса. Координаты фокусов

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c^2=a^2-b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$. (см.рис.2)

Очевидно, для эллипса ε < 1.

Рассмотрим свойства эллипса.

Свойства эллипса:

- Эллипс пересекает каждую из осей координат в двух точках.
- Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.
- Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.
- Эллипс имеет центр симметрии.

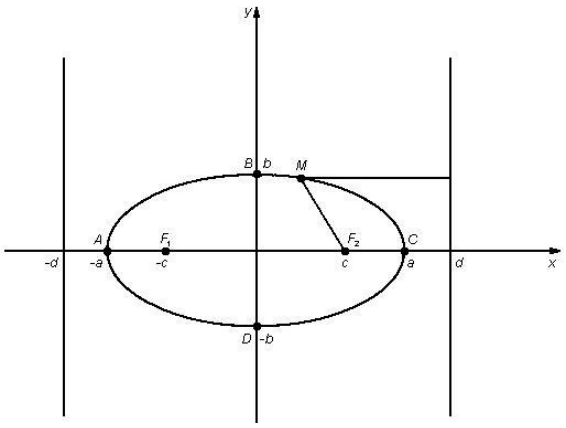
Эллипс может быть получен сжатием окружности, чем больше ε, тем более сжат эллипс.

При малых значениях эксцентриситета эллипс мало отличается от окружности. При ε = 0 эллипс превращается в окружность.

Прямая x = –d называется директрисой, соответствующей фокусу F_1(-c; 0). Наряду с этой директрисой вводят прямую x = d, которая является директрисой, соответствующей фокусу F_2(c; 0).

Если b>ато b – большая полуось, a—малая полуось эллипса. Координаты фокусов

$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, $c^2=b^2-a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$. (см.рис.3)



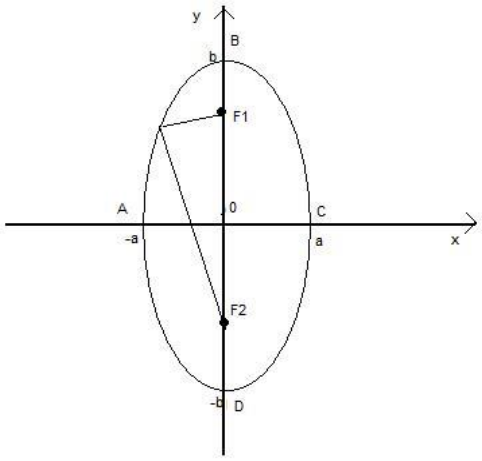


Рис. 2 Рис. 3

3. Гипербола**.**Гиперболойназывается множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (4)

где a–действительная, ab–мнимая полуось гиперболы. $F_1, F_2 \in Ox$, F_1(-c;0), F_2(c;0),

$c^2=a^2+b^2$. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. ε>1, т.к. c>a.

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями: $y = \pm \frac{b}{a} x$ (См. рис. 4)

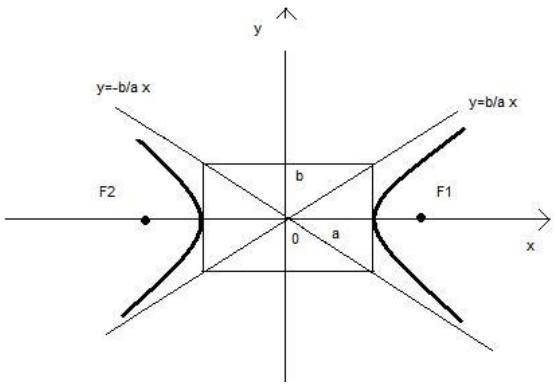


Рис.4

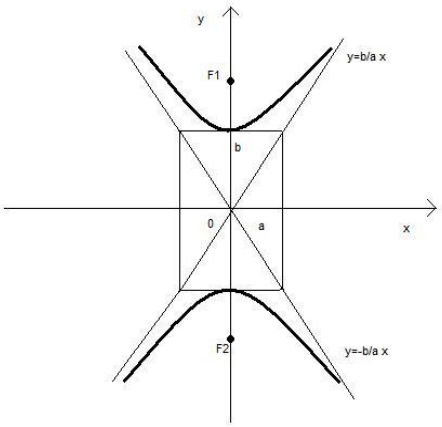


рис.5

Если a = b, $e=\sqrt{2}$, то гипербола называется равнобочной (равносторонней)

Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются директрисами гиперболы. Их уравнения: $y=\pm\frac{a}{\varepsilon}$. Гипербола может быть задана уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. В данном случае $F_1,F_2\in Oy$, $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, асимптота определяется уравнением $y=\pm\frac{b}{a}x$, а уравнение директрисы $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$. (см. рис.5).

4. Парабола.Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1) $y^2 = 2px$ – парабола симметрична относительно оси Ox. (см. рис.6)

2) $y^2 = -2px$ – парабола симметрична относительно оси Ox.

3) $x^2 = 2py$ – парабола симметрична относительно оси Oy.

4) $x^2 = -2py$ – парабола симметрична относительно оси Oy.

В обоих случаях p>0 и вершина параболы, то есть точка, лежащая на оси симметрии, находится в начале координат. p—это расстояние от фокуса F до директрисы l, называется параметром параболы.

Парабола, уравнение которой $y^2 = 2px$ имеет фокус F(p/2,0) и директрису x = - p/2, фокальный радиус-вектор точки M(x,y) на ней r = x+ p/2.

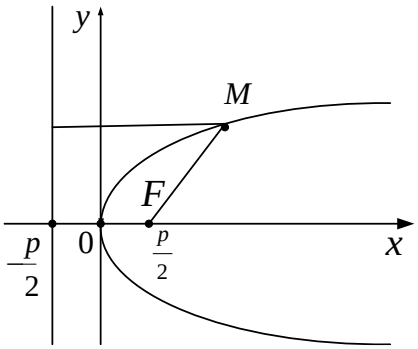


Рис. 6

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$ имеет фокус F(0, p/2) и директрису y = - p/2; фокальный радиус-вектор точки M(x,y) параболы равен r = y + p/2.

Каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$,

Где число p>0, Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Точка O(0;0) называется вершиной параболы, длина r отрезка FM – фокальный радиус точки M, ось Ox—ось симметрии параболы.

Данная прямая в канонической системе координат называется директрисой параболы. Расстояние от нее до фокуса называется фокальным параметромпараболы. Очевидно, он равен p. Эксцентриситет параболы по определению полагают равным единице, то есть ε = k = 1.

Вид параболы в канонической системе координат и расположение ее директрисы приведены на рис. 7.

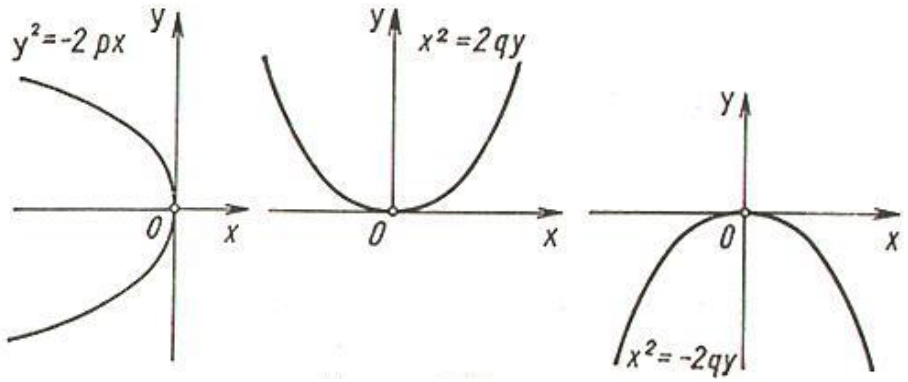


Рис. 7

Практическая часть

1. Пример 1. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-6x-12y-4=0$.

Решение. Выделим в уравнении полные квадраты и приведем его к стандартному виду.

$x^2+y^2-6x-12y-4=0$.

$x^2-6x+9+y^2-12y+36-9-36-4=0,$,

$(x-3)^2+(y-6)^2=49$

Сопоставляя полученное уравнение с уравнением (2) можно сделать вывод: $x_0=3$, $y_0=6$, $R=7$.

Ответ: $x_0=3$, $y_0=6$, $R=7$.

Пример 2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, $\varepsilon=0{,}8$ и $2a=10$.

Решение. Т.к. фокусы эллипса лежат на оси Ox, 2a является большой осью и $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

$2a=10\Rightarrow a=5;\ \varepsilon=\frac{c}{a}$. Координаты фокусов$F_1$(-c;0), F_2(c;0), т.е. $F_1(-4;0), F_2(4;0)$.

$a^2-b^2=c^2\Leftrightarrow b^2=a^2-c^2=9^2-4^2=81-16=65$

Подставляя в общее уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ найденные значения параметров, получим искомое уравнение

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{65}=1$

Ответ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{65}=1$

Пример 3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами 26, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{13}{12}$.

Решение. Из условия 2c=26, следовательно, c=13. Т.к. $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$, то очевидно, что a=12. Найдем малую полуось гиперболы

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.

Уравнение гиперболы имеет вид:

$\frac{x^2}{44}-\frac{y^2}{25}=1$

Ответ: $\frac{x^2}{44}-\frac{y^2}{25}=1$.

Пример 4. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Решение.Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$. Длягиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$. Т.о.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Пример 5.

Составьтеканоническоеуравнениепараболыиуравнениееедиректрисы, фокускоторойимееткоординатыF(-4;0).

Решение. Т.к. фокус лежит на отрицательной полуоси Ox, то уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -2px$. По условию $-\frac{p}{2} = -4 \Rightarrow p = 8$, 2p=16. Итак уравнение параболы имеет вид: $y^2=-16x$. Уравнение директрисы x=4.

Ответ: $y^2=-16x$, x=4.

Подготовка к практической работе:

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, ε=0,8 и 2a=30.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, если гипербола проходит через точку A(8;4).
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат , если ее фокус находится в точке F(0;3).

Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+2x+16y-42=0$.

Практические задания

Вариант №1

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, ε=0,4 и 2a=18.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = 1$. Постройте ее.
3. Напишите уравнение гиперболы и постройте ее, если ее действительная полуось a=8 и эксцентриситет ε=15/14.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат,

симметричной относительно оси Оу и проходящей через точку А(4;2).
5. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+6x-10y+13=0$.

Вариант №2

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Оу, ε=0,6 и 2b=12.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение гиперболы, если координаты фокусов (-4;0), (4;0) и уравнение ее асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат , если ее фокус находится в точке F(5;0).
5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (2;-3), проходящей через точку (5;1).

Вариант №3

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ох, ε=0,3 и 2a=14.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$. Постройте ее.
3. Напишите уравнение гиперболы и постройте ее, если ее действительная полуось b=8 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{6}{5}$.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение директрисы x=3.
5. Составьте уравнение окружности, если точки А(-3;4) и В(5;-8) – координаты концов ее диаметра.

Вариант №4

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ох, ε=0,7 и 2a=20.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите эксцентриситет, координаты фокусов гиперболы $25x^2-16y^2=400$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Оу, если гипербола проходит через точку А(4;-5).
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке F(-2;0).

5. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+12y-13=0$.

Вариант №5

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, ε=0,8 и 2a=8.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{64}=1$. Постройте ее.
3. Напишите уравнение гиперболы и постройте ее, если ее действительная полуось a=10 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{8}{5}$.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку A(-4;2).
5. Составьте уравнение окружности, если точки A(6;4) и B(0;-2) – координаты концов ее диаметра.

Вариант №6

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, ε=0,6 и 2b=22.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите эксцентриситет, координаты фокусов гиперболы $121x^2-81y^2=9801$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение гиперболы и построит ее, если известны координаты фокусов (-20;0), (20;0) и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат , если ее фокус находится в точке F(-4;0).
5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-1;2), проходящей через точку(3;5).

Вариант №7

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, ε=0,3 и 2a=16.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. Постройте ее.
3. Напишите уравнение гиперболы и постройте ее, если ее действительная полуось a=8, а расстояние между фокусами равно 20.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение директрисы y=3.
5. Составьте уравнение окружности, если точки A(5;4) и B(-7;2) –

координаты концов ее диаметра.

Вариант №8

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, ε=0,4 и 2b=20.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите эксцентриситет, координаты фокусов гиперболы $144x^2-81y^2=11664$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение гиперболы, если координаты фокусов (-5;0), (5;0) и уравнение ее асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке F(3;0).
5. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-8x-4y=5$.

Вариант №9

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, ε=0,8 и 2a=18.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{64}=1$. Постройте ее
3. Составьте уравнение гиперболы, если координаты фокусов (-8;0), (8;0) и уравнение ее асимптот $y=\pm\sqrt{3}x$
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение директрисы y=-4.
5. Составьте уравнение окружности, если точки A(0;-4) и B(10;2) – координаты концов ее диаметра.

Вариант №10

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Oy, ε=0,2 и 2b=24.

Постройте данный эллипс.

2. Найдите эксцентриситет, координаты фокусов гиперболы $25y^2-49x^2=1225$. Постройте ее.
3. Составьте уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy, если гипербола проходит через точку $\left(\sqrt{3},-\sqrt{5}\right)$.
4. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку A(2;8)
5. Составьте уравнение окружности с центром в точке (5;-4), проходящей через точку (0;1).

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
5 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
3 заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Элементы аналитической геометрии
Тестирование

Вариант 1

1. **Уравнение x = a, это:**

А) уравнение оси Ox;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ox;

В) уравнение прямой, параллельной оси Oy.

2. **Уравнение y = 0, это:**

А) уравнение оси Ox;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ox;

В) уравнение прямой, параллельной оси Oy.

3. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:**

А) $y = kx + b$;

Б) $y = kx$;

В) $y = kx + 2b$.

4. **Окружностью называется:**

А) геометрическое место точек;

Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;

В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.

5. **Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:**

А) $(x – a)^2 + (y – в)^2 = R^2$;

Б) $(x + a)^2 + (y + в)^2 = R^2$;

В) $(x – a)^2 - (y – в)^2 = R^2$.

6. **Эллипсом называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

7. **Гиперболой называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

8. **Параболой называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

9. **Фокусами называются**

А) точки, лежащие на оси Оу на заданном расстоянии от начала координат;

Б) точки, лежащие на оси Ох на заданном расстоянии от начала координат;

В) точки, лежащие на заданном расстоянии от начала координат.

10. **Не имеет центра симметрии:**

А) эллипс;

Б) гипербола;

В) парабола.

11. **Уравнение эллипса имеет вид:**

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1;$

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1;$

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1.$

12. **Уравнение параболы имеет вид:**

А) $y^2 = 2px$;

Б) $y = 2px$;

В) $y^2 = px$.

13. **Уравнение гиперболы имеет вид:**

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

14. **Парабола имеет:**

А) две оси симметрии;

Б) одну ось симметрии;

В) три оси симметрии.

15. **Эксцентриситетом эллипса е, где 0 < е < 1 называется**

А) величина $e = -\frac{a}{c}$;

Б) величина $e = -\frac{c}{в}$;

В) величина $e = -\frac{c}{a}$.

16.. **Вершиной параболы называется**

А) точка пересечения оси параболы с кривой;

Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;

В) точка пересечения фокуса с кривой.

17. **Центром эллипса является:**

А) вершина эллипса;

Б) фокус эллипса;

В) центр симметрии эллипса.

18. **Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:**

А) $(x – a)^2 + (y – в)^2 = R^2$;

Б) $x^2 + y^2 = R^2$;

В) $x^2 - y^2 = R^2$.

19. **Гипербола имеет:**

А) действительную и мнимую оси;

Б) только действительную ось;

В) только мнимую ось.

20.. **Эллипс имеет:**

А) только большую ось;

Б) только малую ось;

В) большую и малую ось.

Вариант 2

1. **. Уравнение x = a, это:**

А) уравнение оси Ох;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;

В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

2. **Уравнение y = 0, это:**

А) уравнение оси Ох;

Б) уравнение прямой, параллельной оси Ох;

В) уравнение прямой, параллельной оси Оу.

3. **Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:**

А) $d = \sqrt{(x_2 – x_1)^2 - (y_2 – y_1)^2}$;

Б) $d = \sqrt{(x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2}$;

В) $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

4. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид:**

А) $y = kx + b$;

Б) $y = kx$;

В) $y = kx + 2b$.

5. **Уравнение окружности с центром в произвольной точке имеет вид:**

А) $(x - a)^2 + (y - в)^2 = R^2$;

Б) $(x + a)^2 + (y + в)^2 = R^2$;

В) $(x - a)^2 - (y - в)^2 = R^2$.

6. **Не имеет центра симметрии:**

А) эллипс;

Б) гипербола;

В) парабола.

7. **Эллипсом называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

8. **. Гиперболой называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

9. **. Параболой называется**

А) геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

Б) геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная;

В) геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы).

10.**. Уравнение эллипса имеет вид:**

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

11.**. Уравнение параболы имеет вид:**

А) $y^2 = 2px$;

Б) $y = 2px$;

В) $y^2 = px$.

12.**Уравнение гиперболы имеет вид:**

А) $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{в^2} = 1$;

Б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$;

В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

13.**Вершиной параболы называется**

А) точка пересечения оси параболы с кривой;

Б) точка пересечения оси параболы с директрисой;

В) точка пересечения фокуса с кривой.

14.**Центром эллипса является:**

А) вершина эллипса;

Б) фокус эллипса;

В) центр симметрии эллипса.

15.**Парабола имеет:**

А) две оси симметрии;

Б) одну ось симметрии;

В) три оси симметрии.

16.**Эксцентриситетом эллипса e, где 0 < e < 1 называется**

А) величина e = $-\frac{a}{c}$;

Б) величина e = $-\frac{c}{в}$;

В) величина e = $-\frac{c}{a}$.

17.**. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид:**

А) $(x - a)^2 + (y - в)^2 = R^2$;

Б) $x^2 + y^2 = R^2$;

В) $x^2 - y^2 = R^2$.

18.**Эллипс имеет:**

А) только большую ось;

Б) только малую ось;

В) большую и малую ось.

19.**Гипербола имеет:**

А) действительную и мнимую оси;

Б) только действительную ось;

В) только мнимую ось.

20.**Окружностью называется:**

А) геометрическое место точек;

Б) геометрическое место точек, удаленных от центра;

В) геометрическое место точек, одинаково удаленных от центра.

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
17-20		отлично
14-16		хорошо
11-15		удовлетворительно
менее 11 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 40 мин.

Раздел 3 Комплексные числа

Тема 3.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 6

Действия над КЧ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: сформировать навыки выполнения математических действий с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательных формах, решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Теоретическая часть

Комплексными числом z называется выражение вида a+bi, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$.

Следует отметить, что данная запись комплексного числа называется алгебраической. Существуют т.н. тригонометрические и показательные формы, которых будем рассматривать на следующих занятиях.

Число a называется действительной частью комплексного числа и обозначается a=Re z, bi –мнимой частью, b=Im z, i – мнимой единицей.

Множество комплексных чисел обозначается через C. Множество действительных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел. Это значит, что любое действительное число является комплексным.

Комплексные числа можно изображать на плоскости по подобию того, как откладываем действительные числа на числовой прямой. На плоскости выберем прямоугольную систему координат Oxy. Ось Ox называем действительной осью и будем откладывать на ней действительную часть комплексного числа – a, а на оси Oy—мнимую часть b. Комплексному числу z=a+bi соответствует точка (a;b). Комплексное число z=a+bi можно изобразить и с помощью радиус—вектора $\vec{r} = (x; y)$. (см. рис.1)

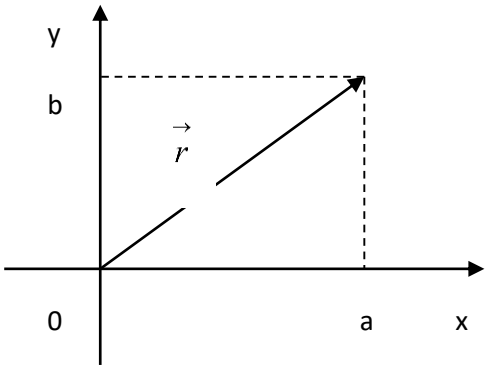


Рис. 1

Числа z=2, Z=-4 – это комплексные числа с нулевой мнимой частью.

Числа z=2i, z=5i – это, наоборот, чисто мнимые числа, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси lmz

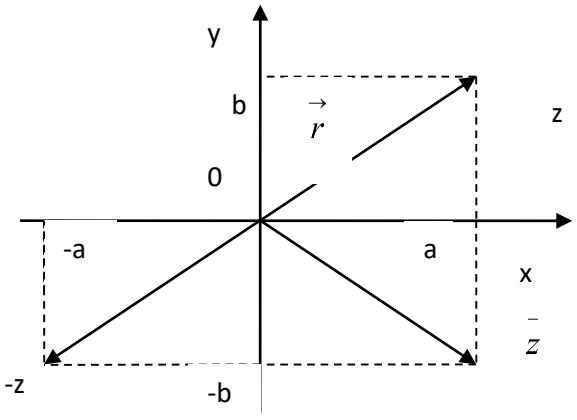


Рис. 2

Два комплексных числа $z_1=a_1+_{b1i}$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются равными, если соответственно равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. (1)

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда a=b=0.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется комплексно-сопряженным с комплексным числом $z = a + bi$. (См. рис. 2). Число –a-bi называется противоположным числу a+bi. (рис.2)

Сумма z комплексных чисел $z_1=a_1+_{b1i}$ и $z_2=a_2+b_2i$ определяется как комплексное число

$$z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i. \quad (2)$$

Сумму комплексных чисел можно найти и как сумму соответствующих векторов $\vec{r_1} = (a_1; b_1)$ и $\vec{r_2} = (a_2; b_2)$. (рис.3)

Вычитание двух комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению.

$$Z=z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i. \quad (3)$$

Геометрически вычитание комплексных чисел сводится к вычитанию соответствующих векторов (рис. 4)

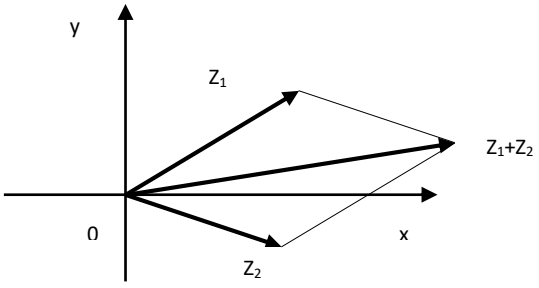


Рис. 3

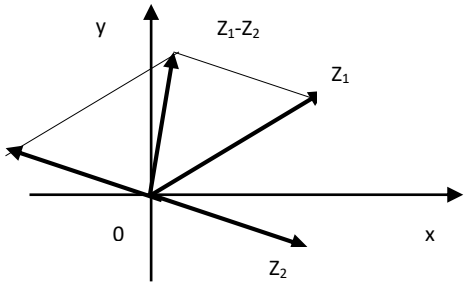


Рис. 4

Умножение двух комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i. \quad (4)$$

Чтобы выполнить деление комплексных чисел, необходимо умножить делимое и делитель на сопряженное делителя:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}. \qquad (5)$$

Возведение комплексного числа в степень n рассматривается как частный случай умножения комплексных чисел.

$i^2=-1,\ \ i^3=-i,\ \ i^4=1,\ \ i^5=i,\ \ i^6=-1,\ \ i^7=-i,\ \ i^8=1.$

И вообще $i^{4n}=i^0=1,\ \ i^{4n+1}=i^1=i,\ \ i^{4n+2}=i^2=-1,\ \ i^{4n+3}=i^3=-i.$

Практическая часть

Пример 1. Даны числа: $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$. Найти z_1+z_2, z_1+z_2, z_1z_2, z_1/z_2.

Решение.

$z_1+z_2=(2+3i)+(5-2i)=2+3i+5-2i=7+i$.

$z_1-z_2=(2+3i)-(5-2i)=2+3i-5+2i=-3+5i$.

(здесь мы применили простое правило раскрытия скобок, а далее сложили действительные и мнимые части чисел отдельно)

$z_1z_2=(2+3i)(5-2i)=10-4i+15i-6i^2=10+11i+6=16+11i$.

(здесь же раскрыли скобки по правилу умножения многочленов, главное, помнить, что $i^2=-1$)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{5-2i}=\frac{(2+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{10+4i+15i+6i^2}{25+4}=\frac{4+19i}{29}=\frac{4}{29}+\frac{19}{29}i$$

Пример 2. Найти x и y из равенства: $3y+5xi=15-7i$, где $x, y \in R$

Решение. Из условия равенств комплексных чисел имеем: $3y=15$; $5x=-7$.

$$y=5; \qquad x=-\frac{7}{5}.$$

Ответ: $y=5$; $x=-1{,}4$.

Пример 3. Вычислить: $i^{34}+i^{23}-i^{-17}$.

Решение: воспользуемся формулами (6)

$$i^{34}+i^{23}-i^{-17}=i^{4\cdot3+2}-i^{4\cdot5+3}-\frac{1}{i^{17}}=i^2-i^3-\frac{1}{i^{4\cdot4+1}}=-1-i-\frac{i}{i^2}=-1-i+i=-1.$$

Ответ: -1

Пример 4. Решить квадратное уравнение: $x^2+3x+4=0$.

Решение. $x^2+3x+4=0$, $D=9-16=-7$,

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}, \qquad x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$, $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

Подготовка к практической работе:

1. Даны следующие числа: 35; $13^{2}/_{3}$; $\sqrt[3]{-27}$; tg 45°; π; 0,(6); — 20; lg 20; $\sqrt{12}$; sin 180°; 0; lg 10; —3,225; 3 + 2i; i$\sqrt{2}$i; —6i; 4 — i$\sqrt{3}$. Назвать среди них числа: 1) натуральные; 2) положительные; 3) отрицательные; 4) рациональные; 5) иррациональные; 6) действительные; 7) мнимые; 8) чисто мнимые; 9) комплексные.
2. В какой четверти координатной плоскости расположены точки, изображающие числа: 3 + 5i; — 4 + i; 2,5 — 6i; —1 — i.
3.
4. Доказать, что: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. Даны два комплексных числа $z = 2 - 3i$ и $z = 5 + 2i$. Найдите: а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите Rez и Imz

б) разность $z_1 - z_2$ и укажите комплексное число, которое сопряжено z.

в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$ и укажите комплексное число, противоположное z.

г) частное $z = \frac{z_1}{z_2}$

6. Найдите значения действительных чисел x и y

a. $7x + 5i = 21 - 10iy$

b. $(2x + y) - i = 5 + (y - x)i$

c. $(3i - 1)x + (2 - 3i)y = 2 - 3i$

7. Выполните следующие действия:

а) $(3 - 4i)^2$ б) $(1 + 2i)^3$ в) $(3i - 4)^3$

г) $(2 - i)^2 - i(2i - 3)$ г) $i^{16} - \frac{3}{i^6}$

д) $(2 - 3i)^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ е) $(3i)^8 - \frac{32}{i^6}$

ё) $\frac{1-i}{i^{17}+i^{19}} - \frac{3}{i+2}$ ж) $1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{10}$

8. Решите уравнения:

а) $2x^2 + 32 = 0$ б) $2ix = 7 - 3i$ в) $x^2 - 2x + 5 = 0$

г) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ д) $x^{2} - 3x + (3 - i) = 0$

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (1)$$

2) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2)$$

3) При возведении комплексного числа в степень n модуль этого числа возводится в степень n, а аргумент умножается на n.

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n). \quad (3)$$

Данная формула называется формулой Муавра.

4) Для любого $z\neq 0$ извлечение корня n-й степени, $n\geq 2$, из числа z всегда возможно и имеет n различных значений.

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad (4)$$

где k=0, 1, 2,…, n-1.

Практическая часть

Пример 1. Умножить числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$,

$z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$ z.

Решение. Воспользуемся формулой (1)

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right)\right) = 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}$$

Пример 2. Вычислить $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2)

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{30}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Пример 6. Вычислить: $\left(\sqrt{3} + i\right)^6$.

Решение. Запишем число $\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

По формуле Муавра находим

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^6=2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\right)=64\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-64.$$

Пример 3. Найти все значения $\sqrt[4]{1}$.

Решение. Воспользуемся формулой (6)

Так как $1=\cos 0+i\sin 0$, то

$$\sqrt[4]{\cos 0+i\sin 0}=1\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}=\cos\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi k}{2}$$

Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, 3 соответственно, получим:

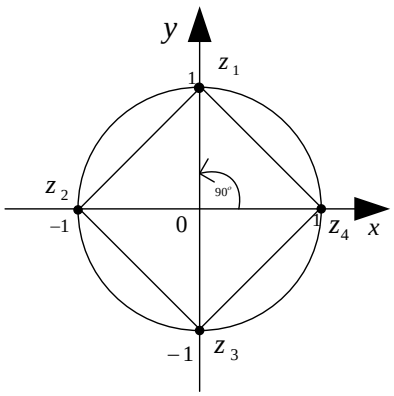
при k=0 $z_1=\cos 0+i\sin 0=1$;

при k=1 $z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$;

при k=2 $z_3=\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}=-1$;

при k=3 $z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$ z;

Ответы отмечены на комплексной плоскости.



Подготовка к практической работе:

1. Вычислить:

а) $15\left(\cos 75^0 + i\sin 75^0\right)\cdot 0{,}5\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)$

б) $12\left(\cos 200^0 + i\sin 200^0\right)\cdot 0{,}5\left(\cos 25^0 + i\sin 25^0\right)$

2. Даны комплексные числа z_1 и z_2. Найдите $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2

а) $z_1 = 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$, $z_2 = 24\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

б) $z_1 = 21\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$.

в) $z_1 = 2{,}5(\cos 110^0 + i\sin 100^0)$, $z_2 = 3(\cos 40^0 + i\sin 40^0)$.

4. Возвести в степень: а) $\left(-5+5i\sqrt{3}\right)^4$ б) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$ в) $\left(-\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)^5$ г) $(3-3i)^4$

5.Извлечь корень: а) $\sqrt[3]{1+i}$ б) $\sqrt[4]{16}$ в) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$ г) $\sqrt[3]{-1}$.

6. Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

Практические задания

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Вычислить: $4\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{20}+i\sin\frac{3\pi}{20}\right)$. 2. Вычислить: $\frac{4\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)}{\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}}$. 3. Возвести в степень: $(1+i)^6$; **4.** Извлечь корень: $\sqrt[3]{i}$.	**1.** Вычислить: $3(\cos 10^0+i\sin 10^0)\cdot 7(\cos 35^0+i\sin 35^0)$. **2.** Вычислить: $\frac{3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$ **3.** Возвести в степень: $(1-i)^7$. **4.** Извлечь корень: $\sqrt[3]{-1+i}$.
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Вычислить: $3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$ **2.** Вычислить: $\frac{\cos 150^0+i\sin 150^0}{\cos(-120^0)+i\sin(-120^0)}$. **3.** Возвести в степень: $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$.	1. Вычислить: $\left(\cos 210^0+i\sin 210^0\right)\div\left(\cos 150^0+i\sin 150^0\right)$. 2. Вычислить: $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 3. Возвести в степень: $(1+i)^5$.

4. Извлечь корень: $\sqrt[4]{4}$.	**4.** Извлечь корень: $\sqrt[3]{-1}$.
Вариант 5 1. Вычислить: $5\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$. 2. Вычислить: $\frac{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ 3. Возвести в степень: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$ 4.Извлечь корень: $\sqrt[3]{8}$.	**Вариант 6** 1. Вычислить: $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ 2. Вычислить: $\frac{7\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{9\pi}{20}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{20}\right)}$ 3. Возвести в степень: $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$ 4.Извлечь корень: $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$.
Вариант 7 1. Вычислить: $\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\right.$ 2. Вычислить: $\frac{24\left(\cos 250^0+i\sin 250^0\right)}{3\left(\cos 130^0+i\sin 130^0\right)}$ 3. Возвести в степень: $\left(3+i\sqrt{3}\right)^4$ 4. Извлечь корень: $\sqrt[4]{i}$.	**Вариант 8** 1. Вычислить: $1{,}5\left(\cos 10^0+i\sin 10^0\right)\cdot 4\left(\cos 35^0+i\sin 35^0\right)$ 2. Вычислить: $\frac{6\left(\cos\frac{43\pi}{30}+i\sin\frac{43\pi}{30}\right)}{18\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)}$ 3. Возвести в степень: $\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^5$ 4. Извлечь корень: $\sqrt{-1+i}$.
Вариант 9 1. Вычислить: $5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2{,}2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$	**Вариант 10** **1.** Вычислить:

2. Вычислить: $\frac{\cos 400^0 + i\sin 400^0}{2\left(\cos 130^0 + i\sin 130^0\right)}$ 3. Возвести в степень: $\left(3 - i\sqrt{3}\right)^8$ 4. Извлечь корень: $\sqrt[3]{27}$.	$5\left(\cos 80^0 + i\sin 80^0\right)\cdot 6\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)$ 2. Вычислить: $\frac{7\left(\cos\frac{22\pi}{21} + i\sin\frac{22\pi}{21}\right)}{\cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7}}$ 3. Возвести в степень: $\left(-4 + 4i\sqrt{3}\right)^6$ 4. Извлечь корень: $\sqrt[3]{i+1}$.

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

		отлично
		хорошо
		удовлетворительно
менее 3		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.1.

Теория пределов.

Практическое занятие № 7.

Вычисление пределов функции. Раскрытие неопределенностей.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель: Формирование умения решать задачи на нахождение пределов функции.

Теоретическая часть

Постоянное число a называется пределомпоследовательности{x_n}, если для любого сколь угодно малого положительного числа существует номер N, что все значения x_n, у которых n>N, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае - расходящейся.

Понятие предела функции является обобщением понятия предела последовательности, так как предел последовательности можно рассматривать как предел функции $x_n = f(n)$ целочисленного аргумента n.

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to x_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x-x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, имеет место неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

В том случае, если последовательность $\{f(x_n)\}$ неограниченно возрастает (или убывает) при любом способе приближения x к своему пределу a, то будем говорить, что функция f(x) имеет бесконечный предел, и записывать это в виде:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

Переменная величина (т.е. последовательность или функция), имеющая своим пределом нуль, называется бесконечно малой величиной.

Переменная величина, имеющая бесконечный предел, называется бесконечно большой величиной.

Можно также находить пределы функции на бесконечности.

Определение.ЧислоА называется пределом функции y=f(x) на бесконечности (или при x, стремящимся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции f(x) сколь угодно мало отличаются от числа A.

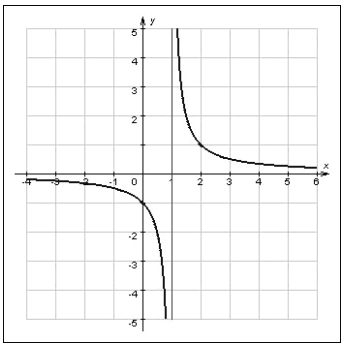


рис.1

На рис.1 изображен график функции $y = \frac{1}{x-1}$. Видно, что ординаты изображающие значения функции, сколь угодно мало отличаются от числа 0 для любых достаточно больших значений x, т.е.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Замечание. Выражения вида 0/0, ∞/∞, $0 \cdot$, $\infty - \infty$, 1^{∞}являются неопределенными, например, отношение двух бесконечно малых или бесконечно больших величин, и нахождение пределов такого вида носит название “раскрытие неопределенностей”. Механизм раскрытия этих неопределенностей приводится в практической части.

Основные теоремы о пределах функции:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to z_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

$\lim\limits_{x\to a} \log_c f(x) = \log_c \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$, где c=const.

Первый замечательный предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Удобно пользоваться также следующими следствиями замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k.\ k\in R;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\frac{k}{l},\quad k,l\in R;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Ко второму замечательному пределу приводят многие задачи, связанные с непрерывным ростом какой-либо величины. К таким задачам, например, относятся: рост вклада по закону сложных процентов, рост населения страны, распад радиоактивного вещества, размножение бактерий и т.п.

Практическая часть

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x\ -x-2}$.

Решение. Применяя теорему 1 о пределе разности и произведения, находим предел знаменателя: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x-2\right)=1-1-2=-2;$

Предел знаменателя не равен нулю, поэтому, по теореме 1 о пределе частного, получаем: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x\ -x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-4)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x-2\right)}=\dfrac{-3}{-2}=1{,}5.$

Ответ: 1,5

Пример 2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя при x⟶3 равны нулю. Для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ разложим на множители числитель и знаменатель и сократим дробь.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Пример 3. Найдите предел функции $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-8}{7x^3-4x+9}$.

Решение.Прих→∞ числитель и знаменатель – величины бесконечно большие. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель нужно разделить на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-8}{7x^3-4x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}}=\frac{3+0-0}{7-0+0}=\frac{3}{7}.$$

Примечание. $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^3}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}=0,$

Ответ: $\frac{3}{7}$.

Пример 4. Найдите предел функции $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$.

Примечание. Можно также использовать следствие из первого замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k.$.

Ответ:3

Пример 5. Найдите предел функции $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$.

Решение. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\left(\frac{x}{4}\right)\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^4=e^4$.

Ответ: e^4.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^x$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+6}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{6}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^6}=e^{-4}.$$

Примечание. Было применено следствие из второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

Ответ: e^{-4}.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Решение. Применять теорему о пределе разности нельзя, поскольку имеем неопределенность вида $\infty-\infty$Умножим и разделим общий член на его сопряженное:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$ Ответ: 1.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Решение. Обозначим arcsin x=t. Тогда x=sin t и при x□0 t□0.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{\sin t}=1$.Ответ: 1

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

Решение. При x→0 числитель и знаменатель стремятся к нулю. Для раскрытия неопределенности умножим и числитель и знаменатель на сопряженное знаменателя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)}{-2}=-\sqrt{5}\text{ .Ответ: }-\sqrt{5}\text{ .}$$

Практические задания

1. Найдите пределы

Вариант 1 **1)** $\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+1\right)$ **2)** $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}$ **3)** $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ **4)** $\lim_{x\to 4+0}\frac{1}{4-x}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ **6)** $\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$ **7)** $\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 3x}$ **8)** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4-x}\right)^x$	Вариант 2 **1)** $\lim_{x\to 2}\left(3x^3-2x-1\right)$ **2)** $\lim_{x\to -8}\frac{64-x^2}{x+8}$ **2)** $\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$ **4)** $\lim_{x\to -3+0}\frac{3}{x+3}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2-1}{5x^3+x-2}$ **6)** $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$ **7)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{2x^2}$ **8)** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$
Вариант 3 **1)** $\lim_{x\to 2}\left(2x^3-3x+6\right)$ **2)** $\lim_{x\to -11}\frac{121-x^2}{x+11}$ **3)** $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$ **4)** $\lim_{x\to 6-0}\frac{5}{x-6}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4-8x^2+2}{3x^4+5x-1}$ **6)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{2x}$ **7)** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$ **8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 14x}$	Вариант 4 **1)** $\lim_{x\to 2}\left(5x^2-3x+1\right)$ **2)** $\lim_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x+3}$ **3)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **4)** $\lim_{x\to 2-0}\frac{3}{x-2}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x-1}{6x^5-6x+4}$ **6)** $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$ **7)** $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2-\sqrt{3x^2-x+4}}$ **8)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 21x}$
Вариант 5 **1)** $\lim_{x\to -3}\left(x^3+4x-3\right)$ **2)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-4x}{x+2}$ **3)** $\lim_{x\to 0,5}\frac{2x^2-5x+2}{4x-4x^2-1}$. **4)** $\lim_{x\to 2-0}\frac{7}{2-x}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3+x^2+10}{2x^3+4x^2+1}$ **6)** $\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{tg2x}$ **7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ **8)** $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x}$	Вариант 6 **1.** $\lim_{x\to -1}\frac{2x+5x^2}{4+5x}$ **2)** $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{3x+15}$ **3)** $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$ **4)** $\lim_{x\to 3+0}\frac{x}{3-x}$ **5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4-1}{5x^3-5x^4+1}$ **6)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}$ **7)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{13+x}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ **8)** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$

Вариант 7 **1)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x+4}{x^2-3x+1}$ **2)** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{5x^2-125}{x+5}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x-2}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 8-0}\dfrac{17}{8-x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{4+x}-\sqrt{8}}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 6x}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-2x}$	Вариант 8 **1)** $\lim\limits_{x\to 2}$ **(x^2-7x+10)2)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-12}{2x+4}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x^2+18x}{x^2-9}$ **4)** $\lim\limits_{x\to -4+0}\dfrac{17}{x+4}$ **5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+7}{-x^3+5x^2+1}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{\sin 13x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{10}}{\sqrt{x}}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-3x}$
Вариант 9 **1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}}{2x^2-7x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{-3+x}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{7}{3-x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+x^6-3}{3x^3-4x^6+1}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{tg4x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{8x}$	Вариант 10 **1)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^3-4x+22\right)$**2)** $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2-81}{2x+18}$ **3)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$ **4)** $\lim\limits_{x\to -12+0}\dfrac{10}{12+x}$ **4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^3-5x+1}{x^3+4x^2+7x}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{\sin 3x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{3x-2}}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2x}$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

7-8 заданий		отлично
6 заданий		хорошо
4-53 заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие № 8.

Точки разрыва первого и второго рода

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель: Формирование умения решать задачи на нахождение пределов функции, исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва.

Теоретическая часть

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если она непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 (следовательно, и в самой точке x_0), существует предел функции при $x \to x_0$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если равенство нарушено, то говорят, что при $x = x_o$ функция f(x) имеет разрыв. Рассмотрим функцию $y = 1/x$. Областью определения этой функции является множество R, кроме $x = 0$. Точка $x = 0$ является предельной точкой множества D(f), поскольку в любой ее окрестности, т.е. в любом открытом интервале, содержащем точку 0, есть точки из D(f), но она сама не принадлежит этому множеству. Значение $f(x_o) = f(0)$ не определено, поэтому в точке $x_o = 0$ функция имеет разрыв.

Функция f(x) называется непрерывной справа в точке x_o, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

и непрерывной слева в точке x_o, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность функции в точке x_o равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно и справа и слева.

Для того чтобы функция была непрерывна в точке x_o, например, справа, необходимо, во-первых, чтобы существовал конечный предел $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, а во-вторых, чтобы этот предел был равен $f(x_o)$. Следовательно, если хотя бы одно из этих двух условий не выполняется, то функция будет иметь разрыв.

1. Точка $x=x_0$ называется точкой разрыв первого рода, если в этой точке функция имеет конечные, но различные односторонние пределы или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой

точке не совпадает с односторонними пределами. А разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции в точке x_0.

2. Точка $x=x_0$ называется точкой устранимого разрыва, если в этой точке функция имеет равные между собой конечные пределы, но сама в этой точке либо принимает другое значение, либо вообще не определенна.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен ∞ или не существует, то говорят, что в точке x_o функция имеет разрыв второго рода.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка [a,b], называется непрерывной в [a,b]. Непрерывная функция изображается сплошной кривой.

Пример 1. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1, если x<1, \\ 2, если 1<x\le 2, \\ 3x, если x>2. \end{cases}$$

Решение. Функции $y=x^3+1$, $y=2$, $y=3x$ являются непрерывными на всей числовой прямой, поэтому точку разрыва функция может иметь только в точках $x=1$, $x=2$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках.

$x=1$. Найдем односторонние пределы:

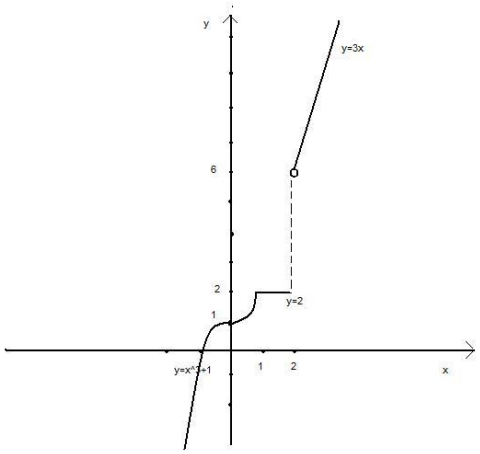
$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x^3+1)=2, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2=2.$$

Т.о. в точке $x=1$ функция не имеет точек разрыва.

Аналогично, для точки $x=2$ имеем:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} 2=2, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(3x)=6.$$

Как видим, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, т.е. в точке $x=2$ функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева.



Скачок функции f(x) в точке x=2 равен $\Delta f(2) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) - \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 6-2 = 4$ **. График функции изображен на рисунке.**

Подготовка к практической работе

1. Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$.
2. Исследовать функцию $f(x) = x^2$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$.
3. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 & при \quad x \neq 0, \\ 1 & при \quad x = 0 \end{cases}$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$.
4. Для данной функции у требуется: 1) найти точки разрыва, их тип 2)найти скачок функции (если есть) 3)сделать чертёж

а) $y = \begin{cases} x^2 - 4, & при \quad x \le 2 \\ 4, & при \quad x > 2 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x + x^2, & при \quad x \le 1, \\ 5, & при \quad x > 1. \end{cases}$

Практические задания

Для данной функции у требуется: 1)найти точки разрыва, их тип 2)найти скачок функции (если есть) 3)сделать чертёж.

Вариант 1 $y = \begin{cases} x^2, при x \le 1, \\ x+1, при x > 1. \end{cases}$	**Вариант 2** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, x < 0, \\ 2x, x \ge 0. \end{cases}$
Вариант 3 $y = \begin{cases} 2x-1, при -1 \le x; \\ 3, при x > -1. \end{cases}$	**Вариант 4** $f(x) = \begin{cases} x-1, x \le 1, \\ \frac{2(1-x)}{x}, x > 1. \end{cases}$
Вариант 5 $f(x) = \begin{cases} -2^x, x < 0, \\ \frac{1}{x-1}, x \ge 0. \end{cases}$	**Вариант 6** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, x \le 0, \\ \frac{1}{x}, x > 0. \end{cases}$

Вариант 7 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lvert x\rvert}{x}, x<1,\\ x+1, x\geq 1.\end{cases}$	**Вариант 8** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\leq 1,\\ 2x, x>1.\end{cases}$
Вариант 9 $y=\begin{cases}2x^2, & при \quad x\leq 2,\\ 5, & при \quad x>2.\end{cases}$	**Вариант 10** $y=\begin{cases}x^2-1, & при \quad x\leq 1,\\ -2, & при \quad x>1.\end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется непрерывной?
2. Перечислите виды точек разрыва.
3. Дайте определения каждого вида точек разрыва.

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

заданий		отлично
заданий		хорошо
заданий		удовлетворительно
менее 1 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 4.2.

Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной

Практическое занятие №9.

Правила дифференцирования. Нахождение производной. Дифференцирование сложной функции.

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ПК 2.3. Осуществлять сбор данных для анализа использования и функционирования

программно-технических средств компьютерных сетей

ПК 2.4. Осуществлять проведение обновления программного обеспечения операционных систем и прикладного программного обеспечения

ПК 3.1. Осуществлять проектирование сетевой инфраструктуры

ПК 3.2. Обслуживать сетевые конфигурации программно-аппаратных средств

Цель: сформировать навыки нахождения производных элементарных и сложных функций,применять основные правила дифференцирования.

Теоретическая часть

Понятие производной является основным понятием дифференциального исчисления. Метод дифференциального исчисления был создан в 17 и 18вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Возникло дифференциальное исчисление при решении задач о мгновенной скорости движения материальной точки. Рассмотрим неравномерное движение материальной точки. Средняя скорость ее за промежуток времени Δt равна $v_{\text{ñð}} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$. Если рассматриваемое движение не является равномерным, то чем меньше выбран промежуток времени Δt, тем лучше указанная формула будет характеризовать движение точки. В идеале мы получаем понятие мгновенной скорости v: это предел, к которому стремится средняя скорость, когда $\Delta t \to 0$, то есть $v_{ср} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$.

Эта и другие задачи приводят к понятию производной функции. Отношение $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ называется разностным отношением, а его предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ --производной функции S(t) и обозначается $S'(t)$.

Определение.Производной функции y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

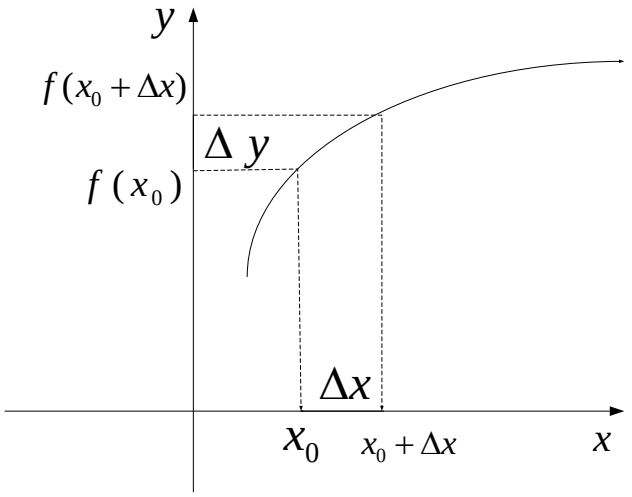


Рис.1

Функция может иметь производную в точке x_0 только тогда, когда функция определена во всех точках некоторой окрестности x_0 и говорим, что функция дифференцируема в этой точке.

Правила дифференцирования.

Пусть даны функции u, v и w.

1. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных:

$(u+v-w)' = u'+v'-w'$.

2. Производная произведения: $(uv)' = u'v+uv'$.

3. Производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(Cu)' = Cu'$.

5. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$,

Производные некоторых элементарных функции

$C' = 0$, $x' = 1$, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(x^n)'=nx^{n-1}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(a^x)'=a^x \ln a$, $(\sin x)'=\cos x$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(e^x)'=e^x$, $(\cos x)'= -\sin x$, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\log_a x)'= \frac{1}{x \ln a}$, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Сложная функция имеет вид: F(x)=f(g(x)), т.е. является функцией от функции. Например, y=sin2x, y=ln(x^2+2x) и т.д.

Если в точке x функция g(x) производную g'(x), а в точке u=g(x) функция f(u) имеет производную f'(u), то производная сложной функции f(g(x)) в точке x существует и равна f '(u)g'(x)

Практическая часть

Пример 1. Вычислить производную функции :

а) y=(5-x^2+x^3)(x^4-3); б) $y = \frac{x-7}{3x}$; в) y=(x^4-5x^3+7)^5

Решение.

а) Применим правило дифференцирования (2)

((5-x^2+x^3)(x^4-3))$'$=(5-x^2+x^3)$'$(x^4-3)+(5-x^2+x^3)(x^4-3)$'$=(-2x+3x^2)(x^4-3)+(5-x^2+x^3)·4x^3=
-2x^5+6x+3x^6-9x^2+20x^3-4x^5+4x^6=7x^6-6x^5+20x^3-9x^2+6x.

б) Применим правило дифференцирования (3)

$$\left(\frac{x-7}{3x}\right)' = \frac{(x-7)'\cdot 3x-(x-7)\cdot(3x)'}{(3x)^2} = \frac{1\cdot 3x-(x-7)\cdot 3}{9x^2} = \frac{21}{9x} = \frac{7}{3x}.$$

г) Применим правило нахождения производной сложной функции $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$. В нашем случае u= x^4-5x^3+7

((x^4-5x^3+7)^5)$'$=5·(x^4-5x^3+7)^4·(x^4-5x^3+7)$'$=5·(x^4-5x^3+7)^4(4x^3-15x^2)=
=(20x^3-75x^2)(x^4-5x^3+7).

Пример 2. Вычислить производную функции $y = \sin 2x \cdot 3^{-4x-1}$.

Решение.

Применим свойство (3) и правило нахождения сложной функции:

$$y' = \left(\sin 2x \cdot 3^{-4x-1}\right)' = (\sin 2x)' \cdot 3^{-4x-1} + \sin 2x \cdot \left(3^{-4x-1}\right)' = 2\cos 2x \cdot 3^{-4x-1} - 4\sin 2x \cdot 3^{-4x-1} \ln 3$$

Пример 3. Найти производную функции $y = arctg^3 \sqrt{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\left(arctg\sqrt{x}\right)^3\right)' = 3arctg^2\sqrt{x} \cdot \left(arctg\sqrt{x}\right)' = 3arctg^2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{3arctg^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Практические задания

Найти производные функции:

1 вариант	**2 вариант**
1) y= $2x^4+3x^5-4x-56$.	1) y= $3x^2+8x^5-21x+43$.
3)y=$3x^2 \cdot 4^{3x}$	3) $y = \ln 4x \cdot \sin(6x-5)$
4) $y = \frac{e^{2x}}{4x^3-3x^2+5}$	4) $y = \frac{5}{x^3-3x^2+5}$
	5) $y = \frac{2}{\sqrt{x^4-3x+8}}$
5) $y = \sqrt[3]{x^3-5x^4}$	
6)y= $(x^3-4x^4+21x)^5$.	6)y= $2(3x^2-x^6+5)^4$.
7) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$	7) $y = \arccos\sqrt{5-3x^4}$
8) $y = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$	8) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
3 вариант	**4 вариант**
1) $y = 6x^5 - 4x^2 + 5x + 67$	1) $y = 7x^2 - 2x^6 + 4x - 45$
2) $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2}$	2) $y = \frac{1}{x^4} - \frac{5}{\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}$
3) $y = e^{4x-2} - \sin 3x$	3) $y = tg5x - 5^{4x}$

4) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 5) $y=\frac{5}{\sqrt[3]{2x-4}}$ 6) $y=(4x^3-5x+4)^{10}$ 7) $y=ar\cos(Inx).$ 8) $y=arctg\sqrt{x^2+3x}$	4) $y=(1-\cos x)/(1+\cos x)$ 5) $y=\frac{4x-\sin x}{x}$ 6) $y=2(x^5-3x^2+x-56)^8$ 7) $y=arctg(4x^3-2x)$ 8) $y=x(\arcsin x+\sqrt{1-x^2})$
5 вариант 1) $y=3x^4-1{,}2x^5-4x-5$ 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}$ 3) $y=tg2x\cdot 3^{3x}$ 4) $y=\frac{\ln 2x}{x^2-5}$ 5) $y=\sqrt[4]{2x^3-x^2}$ 6) $y=(3x^3-x^4+2)^3$ 7) $y=\arccos\frac{2}{x^2-1}$ 8) $y=\ln\sqrt[3]{x^2-1}$	**6 вариант** 1) $y=-9x^2+7x^3-11x+4$ 2) $y=\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-x\sqrt[3]{x}$ 3)y=e^{5x} sin(x-5).· 4) $y=\frac{5x+4}{3x^2+5}$ 5)y=$\frac{2}{e^{2x-3x^2}}$. 6) $y=-5(5x^2-3x^6)^6$ 7) $y=arctg\sqrt{4-3x}$ 8) $y=\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$
7 вариант 1) $y=5x^2-4x^6+x-7$ 2) $y=\frac{3}{x^2}+\frac{4}{5x^4}-\sqrt[3]{x^2}$ 3) $y=e^{-x-2}\cdot\sin 5x$	**8 вариант** 1) $y=8x^2-3x^6+3x$ 2) $y=x^{-6}+\frac{7}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt[4]{x}}$ 3) $y=arctg5x\cdot\sin 4x$

4) $y=\frac{4^{5x-2}}{x^2+3x}$ 5) $y=\frac{4}{\sqrt[6]{5-3x^2}}$ 6) $y=-1{,}5(4x^2-15x^3+7x\_)^4$ 7) $y=ar\cos(e^{2x+4})$ 8) $y=tg\frac{2x}{x^2+6}$	4) $y=\frac{\sin 2x}{x-\sin x}$ 5) $y=\frac{6}{\sqrt[3]{3x^5+7x}}$ 6) $y=7(2x^5-32x^2-6)^4$ 7) $y=arctg(x^3-10x)$ 8) $y=\arcsin 6x+\sqrt{1-3x^2}$
9 вариант 1) $y=2x^8-5x^5+6x-16$ 2) $y=4\sqrt[4]{x}+\frac{4}{3x}-x^{-5}$ 3) $y=\sin 5x\cdot e^{-4x+3}$ 4) $y=\frac{4^{2x}}{7x^2-2x+1}$ 5) $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4x^3-3x^2}$ 6) $y=(-7x^3-20x^4+5x)^9$ 7) $y=\arcsin(x^3+5x)$ 8) $y=\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$.	**10 вариант** 1) $y=13x^7+8x+6$ 2) $y=\frac{1}{2x^4}-\frac{1}{x}-4\sqrt{x}$ 3) $y=In9x\cdot\cos(8x+4)$ 4) $y=\frac{-7}{x^2-3x+1}$ 5) $y=\frac{8}{\sqrt{x^4-x^2}}$. 6) $y=-6(7x^2-2x^8+9x)^{10}$ 7) $y=\arccos\sqrt[4]{9-5x^3}$ 8) $y=In\sqrt{\frac{1+x}{1-2x}}$

Критерий оценки

Количество правильных ответов	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

льно выполненных заданий		
7-8 заданий		отлично
6заданий		хорошо
4-5заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполненитя 60 мин

Практическая работа № 10

Дифференциал функции. Приближенные вычисления.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научится находить дифференциал функции. Находить приближенные значения функции с помощью дифференциала».

Теоретическая часть

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где □□0, при □x□0.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина □□x- бесконечно малая более высокого порядка, чем f□(x)□x, т.е. f□(x)□x- главная часть приращения □y.

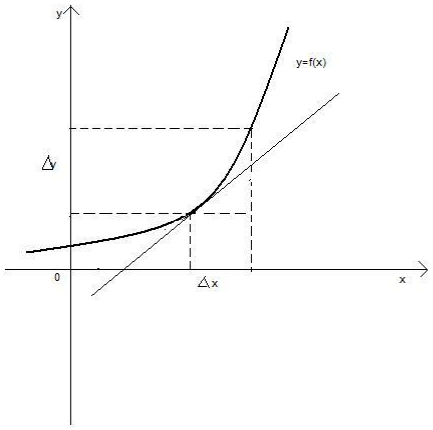
Определение. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что dy = f□(x)□x. Для функции x производная равна 1, и потому ее дифференциал равен Δx, $\Delta x = dx$. Поэтому принято вместо Δx писать dx.. При этом формула дифференциала функции принимает вид:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (1)$$

Можно также записать: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$



Свойства дифференциала.

Если u = f(x) и v = g(x)- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) d(u □ v) = (u □ v)□dx = u□dx □ v□dx = du □ dv

2) d(uv) = (uv)□dx = (u□v + v□u)dx = vdu + udv

3) d(Cu) = Cdu

4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

5) $df(u)=f'(u)du$ где $u=\varphi(x)$.

С помощью дифференциала можно найти приближенные значения функции.

Учитывая, что $\Delta x\to 0$, приращение функции Δy приближённо равно ее дифференциалу, т.е. Δy≈dy, откуда

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0) \qquad (2)$$

Это означает, что приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке.

Практическая часть.

Пример1. Найдите дифференциал функции: а) $y = e^{\sin x}$; б) $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$;

в) $y = x^3 \ln x$

Решение. а) Воспользуемся формулой (1) dy = f□(x)dx.

$$dy = \left(e^{\sin x}\right)' dx = \cos x e^{\sin x} dx$$

б) $dy = \left(\dfrac{x^2+2}{x-1}\right)' dx = \dfrac{2x(x-1)-\left(x^2+2\right)}{(x-1)^2} dx = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx$

в) $dy = \left(x^3 \ln x\right)' dx = \left(3x^2 \ln x + x^2\right) dx = 3x^2 \ln x dx + x^2 dx$

Пример2. Вычислить приближённо: а) $2{,}002^5$; б) $\sqrt[3]{63}$; в) $tg46^0$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (2): $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Положим $f(x) = x^5$, где x=2,002.

2,002=2+0,002, т.е. $x_0 = 2, \Delta x = 0{,}002$

$\int e^{\cos x} \sin x dx$ $f(x_0) = 2^5 = 32$; $df(x) = 5x^4 \Delta x$, $df(x_0) = 5 \cdot 2^4 \cdot 0{,}002 = 0{,}16$.

Т.о. $2{,}002^5 \approx 32 + 0{,}16 = 32{,}16$.

б) В данном случае $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$, $\Delta x = -1$;

$f(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4$; $df(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' \Delta x = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \Delta x$;

$d(f(x_0)) = -\dfrac{1}{18}$;

$\sqrt[3]{63} \approx 4 - \frac{1}{18} = 3\frac{17}{18}$.

в) Рассмотрим функцию $f(x) = tgx$. Полагая $x_0=45^0$, $\Delta x = 1^0 \approx 0{,}0175$, имеем:

$f(x_0) = tg45^0 = 1$, $df(x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, $df(x_0) = \frac{0{,}0175}{\cos 45^0} \approx 0{,}035$.

Т.о. $tg46^0 \approx 1 + 0{,}035 = 1{,}035$.

Практические задания

Вариант 1	Вариант 2
1. Найдите дифференциал функции: а) $y = \sin 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ б) $y = x^2 \ln 2x$ в) $y = \frac{3x-5}{3^x + 2}$ 2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=2x^2+3x$ ее дифференциалом в точке $x=2$ при $\Delta x=0{,}1$. 3. Вычислить приближенно: а) $\sqrt{26}$; б) $\sin 44^0$.	1. Найдите дифференциал функции: а) $y = 4x^4 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$ б) $y = \ln\sqrt{1-x^2}$ в) $y = \frac{2x-8}{\cos x}$ 2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2-4x$ ее дифференциалом в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$. 3. Вычислить приближенно: а) $2{,}003^5$; б) $\cos 31^0$.
Вариант 3	Вариант 4
1. Найдите дифференциал функции: а) $y = 3\cos\frac{x}{6}$ в точке $x_0 = 2\pi$ б) $y = 4x \ln 5x$	1. Найдите дифференциал функции: а) $y = \sqrt{3x-2}$ в точке $x=2$ б) $y = x^3 \cdot 2^{3x}$

в) $y = 2^{\sqrt{x}}$ 2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=-x^3+3x$ ее дифференциалом в точке $x=1$ при $\Delta x=0,01$. 3. Вычислить приближенно: а)$3,992^3$; б) $tg44^0$.	в) $y = \frac{x^2-3}{x+2}$ 2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=-x^2-4x$ ее дифференциалом в точке $x=3$ при $\Delta x=0,02$. 3. Вычислить приближенно: а) $\sqrt[4]{82}$; б) arctg1,005.
Вариант 5 1. Найдите дифференциал функции: а) $y = \sqrt{x^2-4}$ в точке $x=6$ б) $y = \ln \sin 2x$ в) $y = \frac{3x^2-x}{x-4}$ 2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=2x-x^2$ ее дифференциалом в точке $x=3$ при $\Delta x=0,02$. 3. Вычислить приближенно: а)$4,95^3$; б) $\sin 31^0$.	Вариант 6 1. Найдите дифференциал функции: а) $y = \ln 5x-3$ в точке $x=2$ б) $y = x^2 \sin 3x$ в) $y = \frac{3x^3}{4x+2}$ Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=4x+x^2$ ее дифференциалом в точке $x=4$ при $\Delta x=0,01$. 2. Вычислить приближенно: а) $\sqrt{50}$; б) $arcctg1,03^0$.
Вариант 7 1. Найдите дифференциал функции:	Вариант 8 1. Найдите дифференциал функции: а) $y = \sqrt{-3x+6}$ в точке $x=-10$

а) $y = 4\cos 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

б) $y = x^2 \cdot 4^{2x}$

в) $y = \ln \frac{3}{x+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2+x-1$ ее дифференциалом в точке $x=3$ при $\Delta x=0{,}01$.
3. Вычислить приближенно:
4. а) $4{,}003^3$;
   б) $\ln 1{,}03$.

б) $y = 4^{\sin x}$

в) $y = \frac{x-1}{x^2+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^3-x$ ее дифференциалом в точке $x=2$ при $\Delta x=0{,}03$.
3. Вычислить приближенно:
   а) $\sqrt[5]{33}$;

   б) $\cos 61^0$.

Вариант 9

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y = \sqrt{3x^2+1}$ в точке $x=4$.

   б) $y = 3\cos^2 x$

   в) $y = \frac{x-5x^2}{4x+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2+x-1$ ее дифференциалом в точке $x=3$ при $\Delta x=0{,}04$.
3. Вычислить приближенно:
   а) $\sqrt{99}$;

   б) $\sin 62^0$.

Вариант 10

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y = \sqrt{10+2x^3}$ в точке $x=3$

   б) $y = \ln^2 x$

   в) $y = \frac{x-x^3}{5-3x}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=5x-x$ ее дифференциалом в точке $x=2$ при $\Delta x=0{,}1$.

3. Вычислить приближенно:
   а) $1{,}004^4$;

   б) $\operatorname{arctg} 0{,}993^0$.

Вариант 11

Вариант 12

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y=\sqrt{3x+4}$ в точке x=4

   б) $y=x^2\ln 5x$

2. в) $y=\frac{x-5}{x^3-3}$ $y=\frac{x-5}{x^3-3}$ Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^3+x$ ее дифференциалом в точке x=3 при $\Delta x=0,2$.
3. Вычислить приближенно:
   а) $\ln 0,99$;

   б) $\sin 47^0$.

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y=\sqrt{5x^2+1}$ в точке x=4

   б) $y=x(\ln x+1)$

   в) $y=\frac{x-9}{4x^2+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2+3x$ ее дифференциалом в точке x=3 при $\Delta x=0,03$.
3. Вычислить приближенно:
   а) $2,995^4$;

   б) $\ln 1,06^0$.

Вариант 13

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y=\cos 6x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{24}$

   б) $y=x\ln 7x$

   в) $y=\frac{\sqrt{x}+2}{x^2+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=-x+x^3$ ее дифференциалом в точке x=4 при $\Delta x=0,03$.

3. Вычислить приближенно:
   а) $\sqrt{17}$;

   б) $\sin 87^0$.

Вариант 14

1. Найдите дифференциал функции:
   а) $y=\sqrt{6x^2-5}$ в точке x=3

   б) $=\sin\sqrt{2x}$ н

   в) $y=\frac{6x-5}{3x+2x^2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=-x^3+2x$ ее дифференциалом в точке x=2 при $\Delta x=0,1$.

3. Вычислить приближенно:
   а) $\sqrt[4]{82}$;

   б) $\operatorname{arctg} 0,992^0$.

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
3 задания		отлично
2 задания		хорошо
1 задания		удовлетворительно
менее 1 задания		неудовлетворительно

Время выполненитя 60 мин

Тема 4.3.

Интегральное исчисление функций одной действительной переменной

Практическое занятие №11.

Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной и интегрирование по частям.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Сформировать навыки нахождения неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования, замены переменной, интегрирования по частям.

Теоретическая часть.

Пусть функция y=F(x) (1) имеет производную f(x), тогда ее дифференциал

$$dy=f(x)dx.$$

Функция (1) по отношению к ее дифференциалу называется первообразной.

Определение 1.Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Определение 2.Совокупность всех первообразных для функции f(x), определенных на некотором промежутке X, называется неопределенным интегралов от функции f(x) на этом промежутке и обозначается символом ∫f(x)dx.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,,$$

где C – некоторая постоянная.

Определение 3.Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается из любой другой кривой параллельным переносом вдоль оси Oy.

Свойства неопределенного интеграла

1)$(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2) $d\int f(x)dx = f(x(dx))$.

3) $\int df(x) = f(x) + C$.

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

5) $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица некоторых интегралов

1) $\int dx = x + C$,

2) $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$

3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$

13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

14) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

9) $\int \mathrm{ctgxdx} = \ln|\sin x| + C.$

15) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2} = \frac{1}{2\mathrm{a}} \ln\left|\frac{\mathrm{a}+\mathrm{x}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}\right| + C.$

16) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{10}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

18) $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Практическая часть

Непосредственное интегрирование

Этот метод в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Пример 1. $\int (2x^2 - 5x^3 + 4)dx$

Решение. Применим правило интегрирования (4) и (5), а также табличные интегралы (1) и (2):

$$\int (2x^2 - 5x^3 + 4)dx = 2\int x^2 dx - 5\int x^3 dx + 4\int dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 4x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 + 4x + C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{25x^2 + 4}$

Решение. Применим табличный интерал (14), предворительно преобразав подинтегральное выражение.

$$\int \frac{dx}{25x^2 + 4} = \int \frac{dx}{25\left(x^2 + \frac{4}{25}\right)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{2} arctg \frac{1}{2/5} + C = \frac{1}{10} arctg \frac{5x}{2} + C.$$

Замена переменной

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = □(t) и dx = □□(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример 3. $\int (3x-5)^7 dx$

Решение. Положим, 3x-5=t, тогда 3dx=dt, dx=1/3dt. Следовательно,

$$\int (3x-5)^7 dx = \int t^7 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x-5)^8}{24} + C.$$

Пример 4. $\sin^5 x dx$

Решение. $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx.$

Положим, cosx=t, тогда -sinxdx=dt, или sinxdx= -dt. Следовательно,

$$\int \sin^5 dx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^2+t^4) dt = -t+2/3t^3-1/5t^5+C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл: $\int e^{\cos x} \sin x dx$.

Решение. $\int e^{\cos x} \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$,

$$uv = \int udv + \int vdu \text{ или } udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример 6. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = \frac{1}{x^3}dx \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{2x^2} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример 7. $\int e^{2x}\cos x dx$.

Решение. $\int e^{2x}\cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & dv = \cos x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx.$$

Как видно, нужно еще раз применить интегрирование по частям:

$$\int e^{2x}\cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & dv = \sin x dx \\ du = 2e^{2x}dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^{2x}\cos x - \int\left(-\cos x \cdot 2e^{2x}\right)dx =$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx.$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx\right] = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\left(\sin x + 2\cos x\right)$$

$$\int e^{2x}\cos dx = \frac{1}{5}e^{2x}\left(\sin x + 2\cos x\right) + c$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Практическая работа

Интегралы 1-3 найдите непосредственным интегрированием.

Интегралы 4-6 найдите подстановкой.

Интегралы 7-8 найдите интегрированием по частям.

В-1

1. $\int x^2\left(2x-3x^3\right)dx$
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{x}}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$
4. $\int \left(2+x^2\right)^3 xdx$
5. $\int \frac{x^2dx}{2-4x^3}$
6. $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx.$
7. $\int x\cos xdx$
8. $\int e^x \sin\, xdx$

Вариант 2

1. $\int \left(4x^6-5x^9+3x-1\right)dx$
2. $\int \frac{2+x^2+x^5}{x^3}dx$
3. $\int \frac{dx}{36+4x^2}$
4. $\int e^{-2x+6}dx$
5. $\int \frac{\sin\, xdx}{\sqrt{\cos x}}$
6. $\int \frac{xdx}{1-x^2}$
7. $\int \arcsin\, xdx$
8. $\int \ln^2 xdx$

Вариант 3

1. $\int (x-2)^2 dx$
2. $\int \left(4\sin\, 2x-e^{-x}\right)dx$
3. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$
4. $\int \frac{x^2dx}{x^3-4}$
5. $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$
6. $\int \frac{\sin\, xdx}{2-\cos xdx}$
7. $\int x^3 \ln xdx$
8. $\int (2x+1)\ln xdx$

Вариант 4

1. $\int \left(2x^5-3x\right)xdx$
2. $\int \frac{2x^3-4}{x^4}dx$
3. $\int \frac{dx}{4x^2-8}$
4. $\int \sin\left(-4x+\frac{\pi}{3}\right)dx$
5. $\int \frac{\cos xdx}{2\sin\, x+3}$
6. $\int x^2\sqrt{x^3-1}dx$
7. $\int arctgxdx$
8. $\int xe^{2x}dx$

Вариант 5

1. $\int 3x(2x^2-7)\ dx$
2. $\int \frac{5-x^4+2x}{x^5}dx$
3. $\int \frac{3dx}{5x^2-30}$
4. $\int (2x-1)^{10}dx$
5. $\int 3x^2\sqrt{5-x^3}dx$

Вариант 6

1. $\int (x+4)^2 dx$
2. $\int \left(e^{2x}+\cos 3x\right)dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-16}}$
4. $\int \frac{xdx}{3x^2-1}$
5. $\int \sin^4 x\cos xdx$

6. $\int xe^{-x^2}dx$
7. $\int x\sin 2xdx$
8. $x^2\ln 2xdx$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2}}$
7. $\int \frac{\ln xdx}{x^4}$
8. $\int x^2\cos xdx$

Вариант 7

1. $\int\left(6x^5-9x^2+4e^x\right)dx$
2. $\int \frac{3+2x+x^2}{x^3}dx$
3. $\int \frac{3dx}{24+6x^2}$
4. $\int(3x-7)^5dx$
5. $\int x^3\sqrt{x^2-3dx}$
6. $\int \frac{\cos xdx}{(2-\sin x)^2}$
7. $\int\left(3x^2+2x+5\right)\ln xdx$
8. $\int x\cos 2xdx$

Вариант 8

1. $\int\left(8x^7-3x^{-2}+1\right)dx$
2. $\int \frac{x^3-4x+1}{x^2}dx$
3. $\int \frac{2dx}{3x^2\_9}$
4. $\int \frac{x^3dx}{x^4-15}$
5. $\int 2\sin^3 x\cos xdx$
6. $\int\sqrt{4-x^2}xdx$
7. $\int x\sin 4xdx$
8. $\int x^3\ln xdx$

Вариант 9

1. $\int\left(2x^{-5}+x^2+2\right)dx$
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{x^4}}$
3. $\int \frac{dx}{6x^2-18}$
4. $\int e^{-4x+2}dx$
5. $\int \frac{\ln xdx}{x}$
6. $\int\sqrt{2-3x^2}xdx$
7. $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$
8. $\int x\sin 5xdx$

Вариант 10

1. $\int\left(2\cos 3x-3x^2+7\right)dx$
2. $\int \frac{x^4-4x+5}{x^2}$
3. $\int \frac{4dx}{2x^2+4}$
4. $\int\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)dx$
5. $\int x\sqrt{2x^2+1}dx$
6. $\int \frac{xdx}{16-x^2}$
7. $\int 2x\cos 2xdx$
8. $\int e^x\sin xdx$

Вариант 11

1. $\int\left(3^x+5\sin 2x\right)dx$

Вариант 12

1. $\int\left(4-3x^2+6x\right)dx$

2. $\int\left(2e^x-5\cos 3x\right)dx$

2. $\int \frac{3+2x^2+x^5}{x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-45}}$ 4. $\int \frac{2xdx}{x^2-5}$ 5. $\int x\left(2x^2-\right)^3 dx$ 6. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x-3}$ 7. $\int x\cos 6x dx$ 8. $\int e^x \cos 2x dx$	**3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-36}}$ **4.** $\int \frac{x^2 dx}{1-2x^3}$ **5.** $\int 2x^2\left(1+x^3\right)^5 dx$ **6.** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$ **7.** $\int \frac{\ln x}{x^6}dx$ 8. $\int xe^{3x}dx$
Вариант 13 1. $\int \left(x+4x^5-1\right)dx$ 2. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$ 3. $\int \left(2^x+3\sin 5x\right)dx$ 4. $\int 5^{12x-4}dx$ 5. $\int \sin^2 x\cos x dx$ 6. $\int x^3\sqrt{4+x^4}dx$ 7. $\int x\sin 3x dx$ 8. $\int e^x \cos x dx$	**Вариант 14** 1. $\int \left(2x^5-3x^2+4\right)dx$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$ 3. $\int \left(3\sin 3x-5^x\right)dx$ 4. $\int e^{-4x+2}dx$ 5. $\int x^2\left(4x^3-1\right)^8 dx$ 6. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$ 7. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ 8. $\int x^2 \sin x dx$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

5-6 заданий		отлично
заданий		хорошо
3 заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие № 12

Вычисление определенных интегралов заменой переменной и по частям.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель: сформировать навыки вычисления определенного интеграла.

Теоретическая часть

Пусть функция F(x) является первообразной для функции f(x) в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определение. Приращение F(b)-F(a) любой из первообразных функции F(x)+C при изменении аргумента от x=a до x=b называется определенным интегралом от a до b функции f(x) и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ – формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Интегрирование по частям.

Если функции u = □(x) и v = □(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b f(x)dx.$

3) Если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Практическая часть

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx.$

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx = (x^5 + x^2 - 8x)\Big|_1^2 = (2^5 + 2^2 - 8\cdot 2) - (1^5 + 1^2 - 8\cdot 1) = 2.$

Пример 2. $\int_{-1}^2 (x^2 - 1)^3 x dx.$

Решение. Решим методом подстановки. Пусть $x^2 - 1 = t$, тогда 2xdx=dt, xdx=1/2dt. Найдём новые пределы интегрирования, подставляя в равенство $x^2 - 1 = t$ значения a=-1, b=2. $t_н = (-1)^2 - 1 = 0$, $t_в = 2^2 - 1 = 3$. Следовательно,

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 1)^3 x dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \\ t_н = (-1)^2 - 1 = 0 \\ t_в = 2^2 - 1 = 3 \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{1}{2} t^3 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{1}{8}(3^4 - 0^4) = \frac{81}{8} = 10{,}125$$

Пример 3. $\int_0^{\frac{\pi}{9}} x\sin 3x\,dx$

Решение. Интегрируем по частям.

$$\int_0^{\frac{\pi}{9}} x\sin 3x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, dv = \sin 3x\,dx \\ du = dx, v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right| = -\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - \int_0^{\frac{\pi}{9}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{1}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right) = -\frac{\pi}{54} + \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{54}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{9}} x\sin 3x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, dv = \sin 3x\,dx \\ du = dx, v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right| = -\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} - \int_0^{\frac{\pi}{9}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{9}} = \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - 0\right) + \frac{1}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{54} + \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{54}.$$

Практические задания

Вычислите интегралы:

1 вариант	**2 вариант**
1. $\int_{-1}^{2}\left(3 - x^5 + x\right)dx.$	**1.** $\int_0^1\left(101 - x^2 + 4x^3\right)dx.$
2. $\int_1^3 \frac{21}{x^3}\,dx.$	**2.** $\int_1^4\left(\frac{1}{x^2} + x\right)dx.$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx.$	**3.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^5\cos x\,dx.$	**4.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x\,dx.$
5. $\int_{-1}^{0} 3x^2\left(x^3+5\right)^2\,dx.$	**5.** $\int_{-1}^{1} 3x\left(x^2+1\right)^5\,dx.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x\sin 2x\,dx.$	**6.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 2x\,dx.$
3 вариант 1. $\int_1^2 \left(3x^4 - x + 5\right)dx.$ 2. $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^8} - x\right)dx.$ 3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$ 4. $\int_{-1}^0 (1+2x)^4\,dx.$ 5. $\int_{-1}^0 x\left(x^2+3\right)^5\,dx.$ 6. $\int_0^1 arctgx\,dx.$	**4 вариант** 1. $\int_{-1}^2 \left(4x^3 - 2x + 1\right)dx$ 2. $\int_2^5 \frac{1-x^4}{x}\,dx$ 3. $\int_0^{\pi} \left(e^x - \sin x\right)dx$ 4. $\int_0^1 e^{-5x+3}dx$ 5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\cos x\,dx$ 6. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

5 вариант

1. $\int_{-1}^{2}\left(x-3x^2+1\right)dx.$

2. $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^4}dx.$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)dx.$

4. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}.$

5. $\int_{1}^{2}x\left(2x^2+3\right)^3dx.$

6. $\int_{0}^{3}x^2 s\ln|x|dx$

6 вариант

1. $\int_{2}^{4}\left(3-5x^4\right)dx.$

2. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{3dx}{4\cos^2 3x}$

3. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{1+2x^3}$

4. $\int_{0}^{\sqrt{2}}3\sqrt{x^4+16}dx$

5. $\int_{0}^{1}\frac{5xdx}{(x^2-2)^3}$

6. $\int_{1}^{3}\ln x\,dx$

7 вариант

1. $\int_{1}^{2}\left(2x-4x^3+7\right)dx$

2. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{9+x^2}$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$

4. $\int_{0}^{1}3e^{x^3}x^2dx$

5. $\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)^3 xdx$

6. $\int_{0}^{1}xarctgxdx$

8 вариант

1. $\int_{-1}^{3}\left(5-3x^5\right)dx$

2. $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int_{0}^{\pi}(e^{2x}-\cos x)dx$

4. $\int_{0}^{2}\frac{e^x dx}{e^x+2}$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^4 x\cos x dx$

6. $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$

9 вариант

1. $\int_{1}^{2}\left(3x^2+2x\right)dx$

2. $\int_{1}^{25}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$

4. $\int_{3}^{4}\frac{dx}{(2x-4)^3}$

5. $\int_{1}^{2}x\left(2x^2-2\right)^2 dx$

6. $\int_{1}^{e}\ln^2 x dx$

10 вариант

1. $\int_{-1}^{2}\left(5x^4-3\right)dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x}$

3. $\int_{\frac{1}{3}}^{2}e^{3x-1}dx$

4. $\int_{0}^{1}\frac{3dx}{(2-3x)^2}$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x dx}{\sin x-3}$

6. $\int_{0}^{1}\arcsin x dx$

11 вариант

1. $\int_{2}^{4}(3x-7)dx$

2. $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{3}dx$

4. $\int_{2}^{4}\frac{xdx}{x^2-3}$

5. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{3xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}x\sin 3x dx$

12 вариант

1. $\int_{-2}^{3}\left(4-4x^5\right)dx$

2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 4x dx$

4. $\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{3x^3+2}$

5. $\int_{0}^{1}x\sqrt{x^2+1}dx$

6. $\int_{0}^{1}xe^{3x}dx$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
5-6 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
3 заданий		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие № 13

Приложение определенного интеграла

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: Научится применять определенный интеграл для нахождения площади плоских фигур, объема тел вращения, пройденного телом пути, работу силы .

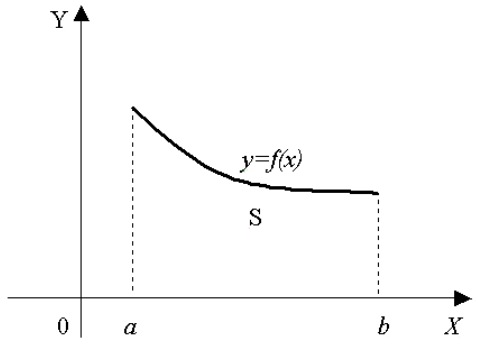
Теоретическая часть

Определенный интеграл широко применяется для нахождения различных физических и геометрических величин. Рассмотрим несколько задач.

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Рассмотрим несколько случаев применения определенного интеграла для нахождения площадей плоских фигур.

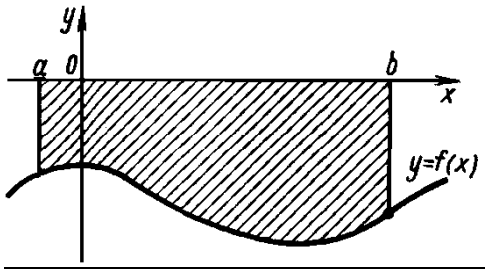
1. Пусть на отрезке [a;b] дана непрерывная неотрицательная функция y=f(x).



$\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и осью Ox. В этом и состоит геометрический смысл определенного интеграла.

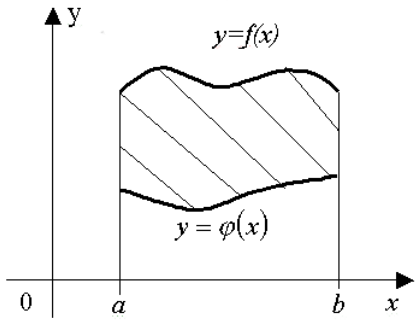
Т.е. $S = \int_a^b f(x)dx$ (1)

2. Фигура ограничена графиком непрерывной неположительной функции, прямыми x=a, x=b и осью Ox. Тогда $S = -\int_a^b f(x)dx$ (или $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$) (2)

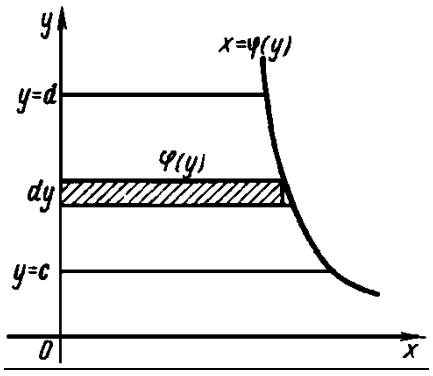


4. Фигура ограничена графиками двух непрерывных на отрезке функциями y=f(x) и y=g(x) и прямыми x=a, x=b, где $f(x) \geq g(x)$. Тогда

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \qquad (3)$$



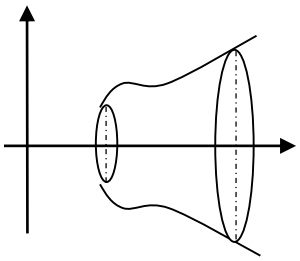
4. Фигура прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой x=f(y), прямыми x=a, x=b и осью Oy. Тогда $S = \int_a^b f(y)dy$ (4)



.

Объем тел вращения.

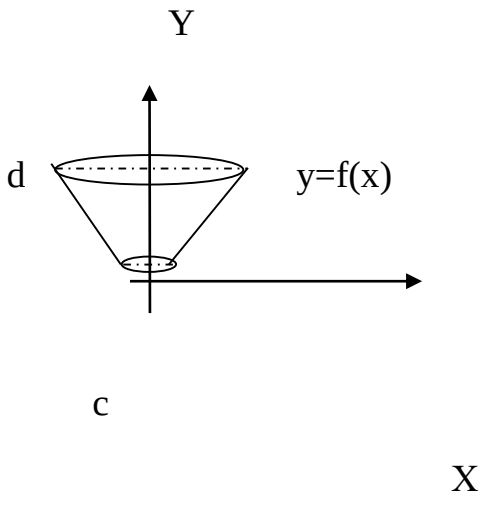
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (5)$$

Если же необходимо найти объем тела, полученного вращением графика непрерывной на отрезке [a, b] функции y=f(x) вокруг оси Oy, то применяем формулу $V = \pi \int_c^d f^2(y)dy$ (6)



Вычисление пути, пройденного точкой

Если точка движется прямолинейно и ее скорость v=f(t) есть известная функция временны t, то путь пройденный точкой за промежуток времени $t_1 \le t \le t_2$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (7)$$

Работа переменной силы

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $a \le x \le b$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (8)$$

Практическая часть

Пример 1. вычислить площадь тела ограниченной области, лежащей между графиками $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Построим графики данных функции по точкам. Эти графики имеют две общих

точек. x_1 =0, x_2=1. При этом график функции $y = \sqrt{x}$ находится выше графика функции $y = x^2$ (см. рисунок).

-

Значит, по формуле (3) площадь области между графиками равна

$$S_D = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного от вращения графика функции

$y = \frac{1}{x}$ [1;3] вокруг оси Ох.

Решение. Используем формулу (5)

$$V = \pi\int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^3 x^{-2}dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_1^3 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}(куб.ед.)$$

Пример 3. Скорость движения точки изменяется по закону v=(t^2+4t-2) м/с. Найдите путь пройденный точкой за 6с от начала движения.

Решение. По условию f(x)=(t^2+4t-2), t_1=0, t_2=6. По формуле (7) имеем:

$$S = \int_0^6 \left(t^2 + 4t - 2\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 2t\right)\Big|_0^6 = \frac{216}{3} + 72 - 12 = 132(м)$$

Пример 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 10 Н.

Решение. Согласно закону Гука F=kx. Т.к. x=0,02 при F=10Н, то

$k\frac{F}{x}=\frac{10}{0{,}02}=500(Н/м)$. Подставляя значение k в закон Гука, имеем: f(x)=500x.

По формуле (8) имеем:

$$A=\int_0^{0,03}500xdx=250x^2\Big|_0^{0,03}=250\cdot(0{,}03)^2=0{,}225(Дж)$$

Практические задания

Вариант №1	**Вариант №2**
1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $x-y+2=0, x=-1, x=2$ б) $y=x^2-1, y=x+1$.	1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а)2x-y+3=0, y=0, x=3, x=1 б) $y=x^2-4, y=x-2$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями x=0, x=6, y=0,5x+4 и y=0. 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(2t^2+3t-1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 10с от начала движения. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.	2. Часть синусоиды y=sinx вращается вокруг оси Ox. Найдите объём тела вращения от $x=-\frac{\pi}{2}$ до $x=\frac{\pi}{2}$ 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(12t-3t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 40 Н.

Вариант №3 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$. б) $y=x^2, y=2x-x^2$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=6x$, $y=1$, $x=1$, $x=3$. 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(4t^2+3t+1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 4-ую секунду. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,08 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 20 Н.	**Вариант №4** 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=\frac{2}{x}, y=0, x=2, x=4$ б) $y=x^2, y=4x-x^2$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=3$, $x+y-3=0$ и $y=0$. 3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле $V=9,8t$. Какой путь пройдет тело за первые 10 с падения? 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 30 Н.
Вариант №5	**Вариант №6**

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=3$

б) $y=x^2, y=3x-x^2$

2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями x=1, x=4, y-x+4 и y=0.

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(5t^2-t-1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 8 с от начала движения.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 60 Н.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, y=0, x=-2, x=2.

б) $y=\frac{5}{x}, y=6-x$

2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, y=0.

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(2t-4t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,12 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 50 Н.

Вариант №7

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{6}{x}, y=0, x=1, x=e$.

Вариант №8

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+x+6$, y=0.

б) $y = x^2 + 4, y = 2x + 4 - x^2$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями y=sinx, y=0, x=0, x=π. 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2+2t-1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 5-ую секунду. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,2 м, если для сжатия ее на 0,04 м нужна сила 10 Н.	б) $y = \frac{3}{x}, y = 4 - x$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями x=0, x=3, y=x-3 и y=0. 3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле V=9,8t. Какой путь пройдет тело за первые 5 с падения? 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,03 м нужна сила 60 Н.
Вариант №9 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а)y=2cosx, $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ б) $y = x^3 + 2, y = \sqrt{x} + 2$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x$, y=0, x=0, x=4	**Вариант №10** 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) xy=4, x=4, x=8. б) $y=2+4x-x^2$, $y=x^2-2x+2$. 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = 0$. 3. Скорость движения точки

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t-t^2+4)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 5с от начала движения. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 30 Н.	изменяется по закону $v=(15t-5t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,12 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 20 Н.
Вариант №11 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=\ln x$, $x=5$, $y=0$. б) $y=x^3+1, y=\sqrt{x}+1$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2=8x$, $y=0$, $x=1$, $x=4$. 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2-2t+4)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 3-ую секунду. 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 25 Н.	**Вариант №12** 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=6x-x^2$, $y=0$ б) $y=\frac{1}{4}x^3, y=\sqrt{2x}$ 2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin 2x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/2$. 3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле $V=9,8t$. Какой путь пройдет тело за первые 12 с падения? 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,07 м, если для

	сжатия ее на 0,03 м нужна сила 30 Н.
Вариант №13	**Вариант №14**
1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=\frac{4}{x}, y=0, x=e, x=e^2$ б) $y=\frac{1}{9}x^3, y=\sqrt{3x}$	1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y=2\sqrt{x}, x=1, x=9, y=0$ б) $y=x^2+2x+2$, $y=2-4x-x^2$.
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{2}{x}, x=1, x=3, y=0$	2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(t^2+5t-3)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 5с от начала движения.	3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(4t-8t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,04 м нужна сила 10 Н.	4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,04 м нужна сила 12 Н.

Контрольные вопросы:

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Какие прикладные задачи можно решать с помощью определенного интеграла?
3. Запишите формулу для вычисления пройденного пути.
4. Запишите формулу для нахождения работы силы.
5. Запишите формулу для нахождения объема тел вращения.

6. Какие еще знаете примеры применения на практике определенного интеграла?

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
4 задания		отлично
3 задания		хорошо
2 задания		удовлетворительно
менее 2 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 4.4.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие № 14.

Нахождение частных производных, полного дифференциала функций двух переменных

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: развить навыки нахождения частных производных функций двух переменны, полного дифференциала, производной неявной функции.

Теоретическая часть

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то переменная z называется функцией двух переменных.

$$z = f(x, y)$$

Определение: Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: Число A называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа □ > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0<r$$

также верно и условие. $|f(x,y)|<\varepsilon$

Записывают: $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется точкой разрыва функции f(x, y).

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Т.к. x и y независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другой нет. Рассмотрим случай, когда переменная y не меняется, а x меняется на Δx .Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции по x.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

.

То он называется частной производной функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}; z'_x; f'_x; \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Определение. Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется полным приращением.

Определение: Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy \qquad (2)$$

Теорема. Если функция f(x, y) и ее частные производные $f_x', f_y', f_{xy}'', f_{yx}''$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \qquad (3)$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Производная неявной функции.

Если функция задана неявно, то ее производную можно найти ПО формуле: $$y'(x) = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)} \qquad (4)$$

Практическая часть

Пример 1. Дана функция z =$2x^3y^4$-5ln4x+4xy-y. Найдите:

а) Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) Частные производные в точке M(-2;3);

в) Полный дифференциал функции;

г) Полный дифференциал функции в точке M;

д) Частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Решение.

а) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^3y^4 - 5\ln 4x + 4xy - y\right)_x' = 6x^2y^4 - \frac{5}{x} + 4y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^3y^4 - 5\ln 4x + 4xy - y\right)_y' = 8x^3y^3 + 4x - 1;$$

б) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 6\cdot(-2)^2\cdot 3^4 - \frac{5}{-2} + 4\cdot 3 = 1958{,}5;$

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 8\cdot(-2)^3\cdot 3^3 + 4\cdot(-2) - 1 = -1737;$

в) Полный дифференциал функции $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$. Подставим в формулу найденные частные производные

$$dz = \left(6x^2y^4 - \frac{5}{x} + 4y\right)dx + \left(8x^3y^3 + 4x - 1\right)dy$$

г) Подставим в полученное выражение значения частных производных в данной точке:

$$dz\big|_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M dy$$

$dz\big|_M = 1958{,}5dx - 1737dy$.

д) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6x^2y^4 - \frac{5}{x} + 4y\right)'_x = 12xy^4 + \frac{5}{x^2};$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(8x^3y^3 + 4x - 1\right)'_y = 24x^3y^2;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(6x^2y^4 - \frac{5}{x} + 4y\right)'_y = 24x^2y^3 + 4;$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x = \frac{2x}{2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y = \frac{2y}{2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

Пример 3. Найдите производную неявной функции $xe^{3y} + y\ln x = 4$

Решение. 1 способ. Найдем полную производную равенства с учетом того, что y=y(x):

$$e^{3y} + 3xe^{3y} \cdot y' + y' \ln x + \frac{y}{x} = 0,$$

$$y'\left(3xe^{3y} + \ln x\right) = -e^{3y} - \frac{y}{x},$$

$$y' = -\frac{e^{3y} + y/x}{3xe^{3y} + \ln x}.$$

2 способ. Воспользуемся формулой: $y'(x) = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

В нашем случае $F(x,y) = xe^{3y} + y\ln x - 4$

$$F_x'(x,y) = e^{3y} + \frac{y}{x}; \quad F_y'(x,y) = 3xe^{3y} + \ln x;$$

$$y' = -\frac{e^{3y} + y/x}{3xe^{3y} + \ln x}.$$

Практические задания:

А) Дана функция z=f(x,y). Найдите:

1. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;
2. Частные производные в т. M(2;-1);
3. Полный дифференциал dz;
4. Частные производные второго порядка функций.

Б) Найдите частные производные и полный дифференциал функций:

В) Найдите производную неявной функции:

Вариант 1	Вариант 2

а) $z = 3x^2y - xy^4 + 2x - y + 2$ б) $z = \ln\left(x - \sqrt{y}\right)$ в) $xy - x^3 + y = 0$	а) $z = -4x^4y^3 + 3xy + 2x - 12$ б) $z = 2x^{\sin y}$ в) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
Вариант 3 а) $z = 5xy - x^4y + 4xy^3 + 2$ б) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ в) $x\sin\ y + y\sin\ x = 0$	Вариант 4 а) $z = 5xy + 5x^2y^3 - 2x - 3$ б) $z = arctg\frac{y}{x}$ в) $x^2 + 4xy + y^2 = 0$
Вариант 5 а) $z = -3x^3y^2 + 2xy - xy^3 - 2$ б) $z = (\sin\ x)^{\cos y}$ в) $y^3 + 4x^3 + xy = 0$	Вариант 6 а) $z = 3xy^3 + 4x^2y - y - 2$ б) $z = x^2\ln(x + y)$ в) $xy^2 - y\sin\ x = xy$
Вариант 7 а) $z = 4x^5 - 3xy + \cos x - 3$ б) $z = \sin\frac{2x - y^2}{x + y}$ в) $x\cos x + y\sin\ x = x - y^2$	Вариант 8 а) $z = 3x^3y^5 - 2xy^3 + 3x - 4y - 1$ б) $z = \ln\frac{xy}{x - y}$ в) $xe^y + xy = 7$
Вариант 9 а) $z = 4x^2y^3 - 2xy + 2x - 3y$ б) $z = 4\left(x^2y - y^2\right)^3$ в) $5x^2\ln\ y + 3xy^4 = 5xy$	Вариант 10 а) $z = 4x^5y^2 - 3xy^3 + xy - 2$ б) $z = \sqrt{2x - 3y^2}$ в) $y^2\sin\ x - 3x\cos 3x = \ln\ x + 2$

Вариант 11 а) $z = -3x^3y^2 + y\sin 3x - 3xy + 1$ б) $z = \ln \frac{xy}{x-y}$ в) $x^3y^2 - x\ln y = x + 2y$	Вариант 12 а) $z = 3x - 4x^3y^4 + 2xy^2 - 2$ б) $z = \cos \frac{2x-y}{3xy}$ в) $3x^3y - 2xy^2 = \sin x$
Вариант 13 а) $z = 3y^4 + 2x^3y^2 - xy - 2$ б) $z = e^{\frac{3x}{y} - 2x}$ в) $4xy^2 - 3xy - e^x = 3$	Вариант 14 а) $z = 12x^2y + 3xy^4 - 3x^3y + 2x - y$ б) $z = \sqrt[3]{3x^2 + xy}$ в) $3x - x\ln y = x^2 + y^2$

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией двух переменных?
2. Что называется областью определения функции двух переменных?
3. Дайте определение предела функции двух переменных.
4. Какая функция называется непрерывной в точке?
5. Что называется частным производным функции от переменной x? y?
6. Как найти полный дифференциал функции?
7. Способы нахождения производной неявной функции.

Критерий оценки

Количество правильно	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

выполненных заданий		
5-6 заданий		отлично
4 задания		хорошо
3 задания		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 4.5.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие № 16

Вычисление повторных и двойных интегралов

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: сформировать навыки нахождения двойных интегралов в прямоугольных координатах, применения двойных интегралов для решения геометрических задач.

Теоретическая часть

Пусть функция f(x,y) определена внутри некоторой области D и на ее границе. Разобьем область D на n частичных областей D_1, D_2, ..., D_n. Их площади обозначим через $\Delta S_1,\Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$. В каждой частичной области возьмем по произвольной точке ($P_1(x_1; y_1)$ в области D_1, P_2 $(x_2; y_2)$ в области D_2 , и т.д.). Составим интегральную сумму:

$$S_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \ldots f(x_n, y_n)\Delta S_n$$

Обозначим через d наибольший из диаметров области D. Устремим n к бесконечности так, чтобы d стремилось к нулю.

Рис.1

Конечный предел последовательности S_n (если он существует) при $d \to 0$, который не зависит ни от способа разбиения области D , ни от выбора точек P_1, P_2, ..., P_n, называется **двойным интегралом** функции f(x,y) и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

Функция f(x,y) называется интегрируемой функцией на области D . Область D называется **областью интегрирования**.

Непрерывная на замкнутой области функция является интегрируемой на этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла. Пусть интегрируемая функция f(x,y) принимает в области D только положительные значения. Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ численно равен объему вертикального цилиндрического тела, построенного на основании D и ограниченного сверху соответствующим куском поверхности z = f(x,y).

повторном интеграле. (см. рис. 1)

Свойства двойного интеграла

Свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

1. Двойной интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций:
2. $\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
3. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла: $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$
4. Если в области D $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

5. Если область D представляется в виде объединения двух областей D_1 и D_2 ,без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

6. Теорема о среднем значении.

   Если функция f(x,y) непрерывна на области D, то существует точка $M_0(x_0,y_0) \in D$ такая, что

   $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S$$

Вычисление двойного интеграла

1) Если граница области D пересекается всякой прямой x = c (**c - const**) не более чем в двух точках, то область D называется правильной в направлении оси OX. Ограниченная область D , правильная в направлении оси OX, задается неравенствами:

$a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$,

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - функции, непрерывные на отрезке [a, b] (рис.2).

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (1)$$

Сначала необходимо найти определенный интеграл, $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по переменной y предполагая, что x остается постоянным. Затем результат интегрируется по переменной x.

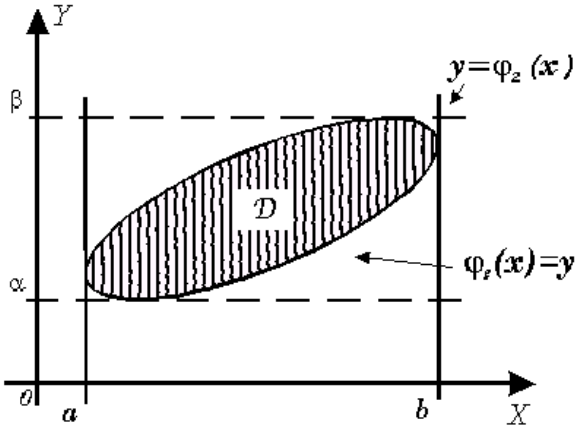


Рис.2

рис.3

2).Если граница области D пересекается прямой y = c (c постоянная) не более чем в двух точках, то область D можно задать другими неравенствами:

$c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$. (рис.3)

В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \qquad (2)$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной x, а затем y.

3). Если область D есть прямоугольник со сторонами параллельными координатным осям и заданными неравенствами $a \le x \le b, c \le y \le d$ (рис.4), то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

или (3)

. $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$ Рис. 4

Двойные интегралы используется при решении многих геометрических и физических задач: вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, координат центра тяжести, массы плоской фигуры, статистических моментов плоской фигуры, моментов инерции и т.д. Остановимся только на некоторых.

Вычисление площадей плоских фигур

В прямоугольной системе координат площадь ограниченной правильной в направлении оси OX области D: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, равна

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Вычисление объемов

Объем V тела, ограниченного поверхностью z = f(x,y), где f(x,y) - неотрицательная функция, плоскостью z = 0 и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси OZ, равен двойному интегралу от функции f(x,y) по области D:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Практическая часть-

Пример 1. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^1 \left(x^2 - y^2\right)dy$.

Решение. Решим сначала внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянным:

$$\int_0^1 \left(x^2 - y^2\right)dy = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - 0 = x^2 - \frac{1}{3} \text{..}$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменой x:

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right)\Big|_1^3 = (9-1) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 8 .$$

Ответ: 8.

Пример 2. Вычислите повторный интеграл $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2y} (2x + y)dx$

Решение. Найдем внутренний интеграл:

$$\int_{y^2}^{2y} (2x + y)dx = \left(x^2 + xy\right)\Big|_{y^2}^{2y} = \left(4y^2 + 2y^2\right) - \left(y^4 + y^3\right) = 6y^2 - y^4 - y^3$$

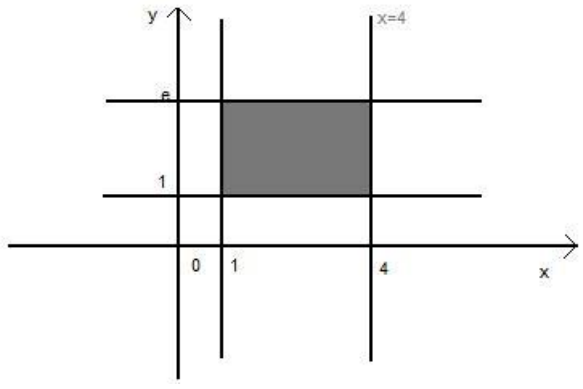
Найдем внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left(6y^2 - y^4 - y^3\right)dy = \left(2y^3 - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - 0 = 1\frac{11}{20} .$$

Ответ: $1\frac{11}{20}$.

Пример 3. Вычислите двойной интеграл $\iint_D \frac{x}{y} dxdy$ по области, ограниченной линиями: x=1, x=4, y=1, y=e.

Областью D является прямоугольник изображенный на рис.5.



Воспользуемся формулой (3):

$$\iint \frac{x}{y}dxdy = \int_1^4 dx \int_1^e \frac{x}{y}dy$$

$$\int_1^e \frac{x}{y}dy = (x\ln y)\Big|_1^e = x\ln e - x\ln 1 = x,$$

$$\int_1^4 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = 8 - 0{,}5 = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5

рис. 5

Пример 4. Вычислите двойной интеграл $\iint_D xdxdy$ по области, ограниченной линиями: x=0, y=x, y=6-x^2.

Решение. Изобразим область D на плоскости Oxy.

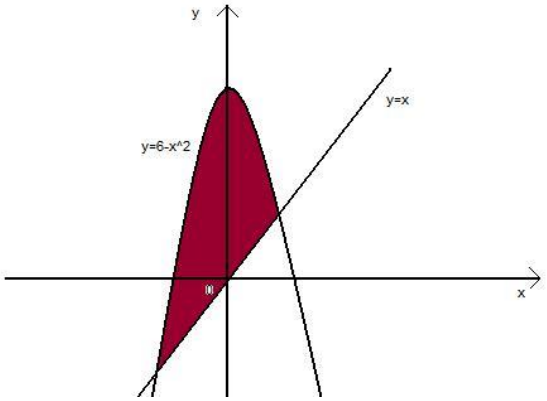


Рис.6

Как видно из рисунка область D является простой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. Мы можем воспользоваться формулой (1) или (2).

$$\iint_D xdxdy = \int_0^2 dx \int_x^{6-x^2} xdy,$$

$$\int_x^{6-x^2} xdy = (xy)\Big|_x^{6-x^2} = x(6-x^2) - x^2 = 6x - x^3 - x^2,$$

$$\int_0^2 \left(6x - x^3 - x^2\right)dx = \left(3x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 12 - 4 - \frac{8}{3} = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Практические задания

1 вариант	**2 вариант**
Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_0^2 dx \int_1^4 \frac{x}{y} dy$; 2. $\int_2^3 dy \int_y^{y^2} (xy + 3x)dx$ 3. $\iint_D \left(x^3 - 2y\right)dxdy$, D: $1 \le x \le 4, 2 \le y \le 3$ 4. $\iint_D (x + y)dxdy$, D:. $y = x, y = 5x, x = 1$ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=4x-3$.	Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_1^2 dx \int_0^4 2ydy$; 2. $\int_1^3 dy \int_0^{2-y} \left(2x - 3y^2\right)dx$; 3. $\iint_D xydxdy$, D: $2 \le x \le 4$ $0 \le y \le 2$ 4. $\iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$; D: 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2x+3$.
3 вариант	**4 вариант**
Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_0^1 dy \int_1^2 2xy^2 dx$; 2. $\int_1^3 dx \int_0^{x+2} (2 - x - y)dy$ 3. $\iint_D \frac{1}{xy} dxdy$ D: $2 \le x \le 3$, $2 \le y \le 3$ 4. $\iint_D (2x - 2y)dxdy$,	Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_1^3 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin\, ydy$; 2. $\int_0^2 dy \int_1^{2y+2} \left(x - y^3\right)dx$; 3. $\iint_D e^{x-y} dxdy$ D: $0 \le x \le 1$ $0 \le y \le 2$ 4. $\iint_D (x + 2y)dxdy$;

D: $x = 0,\ x^2 \le y \le 4$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5$ и $x-y+5=0$.

D: $x^2 \le y \le 9$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-8x+16$ и $x+y-6=0$.

5 вариант

Вычислить интегралы 1-4

1. $\int_1^3 dy \int_1^2 (x+4y)dx$
2. $\int_1^3 dx \int_0^{3-2x} 2xydy$
3. $\iint_D (3x^2+4y)dxdy$

D: $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

4. $\iint_D ydxdy$;

D: $x^3 \le y \le 8,\ 0 \le x \le 2$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-6x+9$ и $y=3x-9$.

6 вариант

Вычислить интегралы 1-4

1. $\int_2^3 dx \int_1^x \frac{2x}{y} dy$
2. $\int_0^1 dy \int_1^{y^2} (2x-2y)dx$
3. $\iint_D (x+3y)dxdy$

D: $1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$

4. $\iint_D (x^2-2y)dxdy$;

D: $x+1 \le y \le -x^2+1$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+6x-5$ и $y=0$.

7 вариант

Вычислить интегралы 1-4

1. $\int_1^2 dx \int_0^x \frac{3x}{y} dy$
2. $\int_0^2 dy \int_1^{y+3} (3y^2-2x)dx$
3. $\iint_D (y-3x^5)dxdy$

D: $0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$

4. $\iint_D 2xydxdy$;

D: $x=4, y=\frac{4}{y}, y=2$

5. Вычислить площадь фигуры,

8 вариант

Вычислить интегралы 1-4

1. $\int_0^2 dy \int_2^3 (3y+2x)dx$
2. $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \frac{y}{x} dy$
3. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

D: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

4. $\iint_D (2x+4y)dxdy$;

D: $0 \le y \le -x^2+4$

5. Вычислить площадь фигуры,

ограниченной линиями: y=sinx, y=0, $x=-\frac{\pi}{2}, x=\pi$	ограниченной линиями: $y=\cos x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$
9 вариант Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_0^3 dx \int_1^2 \frac{3y}{x^2} dy$ 2. $\int_0^1 dy \int_1^{2y+3} (4y+2x)dx$ 3. $\iint_D (2y-5x^4)dxdy$ D: $0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0$ 4. $\iint_D (x+3y)dxdy$; D: $y=x^2, x=0, y=2$ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: y=1+cosx, y=1, $x=-\frac{\pi}{2}, x=\pi$.	**10 вариант** Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_{-1}^2 2dx \int_0^x \frac{x}{y} dy$ 2. $\int_0^2 dy \int_1^{-2x+1} (3y^2-6x)dx$ 3. $\iint_D (y-2x^3)dxdy$ D: $-2 \le x \le 0$, $2 \le y \le 3$ 4. $\iint_D (y+4x)dxdy$; D: $x=0, x=\frac{\pi}{4}, y=x+2, y=2$ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$, $y=-x^2+2$,x=0.
11 вариант Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_{-2}^1 dx \int_0^{x^2} \frac{x^3}{y} dy$ 2. $\int_0^1 3dy \int_y^{y^2} xydx$ 3. $\iint_D (5y^4-2x)dxdy$ D: $-2 \le x \le 3; 0 \le y \le 2$ 4. $\iint_D 3ydxdy$; **D:**	**12 вариант** Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_0^3 dy \int_1^2 (2x+y)dx$ 2. $\int_0^2 dx \int_2^{-2x+3} (3y^2-2x)dy$ 3. $\iint_D \left(\frac{x}{y}\right)dxdy$ D: $1 \le x \le 2; 1 \le y \le e$ 4. $\iint_D (2x+y)dxdy$;

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=3x^3$, $y=2x+1$, $x=0$.	**D:;** $x=0, y=\frac{4}{x}, y=2$ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $x=0, y=2-x$.
13 вариант Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_{-1}^{2} dy \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 2. $\int_{1}^{3} dx \int_{0}^{4-x} (y-x) dy$; 3. $\iint_D \frac{y}{x} dxdy$; D: $e \le x \le e^2; 1 \le y \le e^2$. 4. $\iint_D (x-2y) dxdy$; D: $x+2 \le y \le x^2$ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x-3y+2=0$, $y=\sqrt{x}$.	**14 вариант** Вычислить интегралы 1-4 1. $\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{2} (2x+3) dy$; 2. $\int_{0}^{3} dy \int_{y}^{2y} (-y^2+2x) dx$; 3. $\iint_D \frac{y}{x^2} dxdy$; D: $2 \le x \le 3; 0 \le y \le 2$. 4. $\iint_D x dxdy$; D: $y=\frac{2}{x}, y=3-x$; 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x$, $x^2+2x=0$.

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

5 заданий		отличн о
4 заданий		хорош о
		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 4.6.

Теория рядов

Практическое занятие № 17.

Исследование сходимости знакоположительных знакочередующихся рядов.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: сформировать навыки исследования числовых рядов на сходимость.

Теоретическая часть

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

называется числовым рядом и обозначается

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

При этом числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$ называются членами ряда, а a_n – общим членом ряда.

Ряд считается заданным, если задано правило, позволяющее по известному номеру n его члена записать этот член ряда.

Определение. Сумма первых n членов ряда называется n-ой частичной суммой ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Определение. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакое числовое значение.

Необходимый признак сходимости числового ряда (1):

Если ряд (1) сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Отсюда вытекает, что если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Но выполнение необходимого признака сходимости не гарантирует сходимость данного ряда и следует исследовать ряд с помощью достаточных признаков сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого все $a_1>0$, $a_2>0$,..., $a_n>0$,... называется знакоположительным числовым рядом.

Рассмотрим два знакоположительных числовых ряда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (3)$$

Признак сравнения I. Пусть даны два числовых ряда (2) и (3). Исследуется на сходимость ряд (2). Известно поведение ряда (3). Если начиная с некоторого номера n:

1) $a_n \leq b_n$ - члены ряда (2) не больше соответствующих членов ряда (3), и ряд (3) сходится, то и ряд (2) также сходится.

2) $a_n \geq b_n$ - члены ряда (2) не меньше соответствующих членов ряда (3), и ряд (3) расходится, то и ряд (2) также расходится.

Сравнение исследуемых рядов производится обычно со следующими известными рядами:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, а $\neq 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| \geq 1$);

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходящийся гармонический ряд;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p > 1$ и $p \leq 1$).

Признак сравнения II**.** Пусть даны два числовых ряда (2) и (3). Исследуется на сходимость ряд (2). Известно поведение ряда (3). Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, то оба ряда (2) и (3) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2).

2 Признак Даламбера

Пусть дан ряд (2) с положительными членами. Допустим, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho .$$

Тогда: 1) если $\rho<1$, то ряд (1) сходится;

2) если $\rho>1$,то ряд (1) расходится.

При $\rho=1$ требуется дополнительное исследование.

3 Признак Коши

Замечание. Признак Даламбера целесообразно применять тогда, когда общий член ряда содержит факториал или содержит одновременно степенную и показательную функции относительно n.

Признак Коши (радикальный). Пусть дан числовой ряд (2). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то

при k < 1 ряд (2) сходится,

при k > 1 ряд (2) расходится,

при k = 1 вопрос о сходимости ряда (2) остается открытым.

Замечание. Признак Коши (радикальный) целесообразно применять в том случае, если общий член ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения.

Интегральный признак Коши (основан на сравнении рядов с несобственными интегралами). Пусть общий член ряда (2) $a_n = f(n) > 0$. Если функция f(x), принимающая в точках x = n, n = 1, 2, 3, ... значения f(n), монотонно убывает в некотором интервале A<x<∞, где A>1, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_{A}^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Практическая часть

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4n^3+2}$.

Решение

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{4n^3+2}=\frac{1}{4}\neq 0\,.$$

Т.е. необходимый признак сходимости не выполнен.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4n^3+2}$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Решение. Так как n>lnn для n≥2, тогда $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ для $n\geq 2$, а $\frac{1}{n}$ - общий член расходящегося гармонического ряда, то в силу признака сравнения I данный ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$ на сходимость по признаку Даламбера.

Решение. $a_n=\frac{n^5}{2^n}, \quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}\div\frac{n^5}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

$\rho=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$ сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. По известному члену ряда a_n, заменяя в нем n на n + 1, находим следующий за ним член a_{n+1}. Здесь

$$a_n=\frac{2^n}{n!}, \quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n+3}\right)^n$.

Решение. Общий член ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения, поэтому удобнее всего применение радикального признака Коши:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n+3}=4>1$$

следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n+3}\right)^n$ расходится.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, (1)

содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется знакопеременным.

Определение. Знакопеременный ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$, (2)

составленный из модулей членов данного ряда.

Естественно, что всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся, т. е. из сходимости ряда (2) всегда следует сходимость ряда (1).

Определение. Знакопеременный ряд (1) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (2), составленный из модулей его членов, расходится.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд - значит не только ответить на вопрос, сходится он или расходится, но и как сходится: абсолютно или условно.

Среди знакопеременных рядов особо выделяют класс знакочередующихся рядов.

Определение. Знакочередующимся называется ряд, в котором два соседних члена имеют разные знаки. Его можно записать так:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

или (3)

$$-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)a_n$$

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница**.** Пусть дан знакочередующийся ряд (3). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ - (члены, начиная с некоторого, монотонно убывают по абсолютной величине);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

то ряд (3) сходится.

Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

При исследовании знакопеременных рядов на абсолютную сходимость пользуются всеми известными признаками сходимости для рядов с положительными членами.

Практическая часть

Пример 1**.** Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n+3}=\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{9}-\frac{4}{11}+\ldots+\frac{(-1)^n n}{2n+3}+\ldots$

Решение. Т.к. 1) $\frac{1}{5}<\frac{2}{7}<\frac{3}{9}<\frac{4}{11}<\ldots$ данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится

Пример 2. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3}$.

Решение. Применяем признак Лейбница. Так как

1) $1>\frac{1}{5}>\frac{1}{9}>\frac{1}{13}>\ldots$ - члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n-3}=0$ - выполнен необходимый признак, данный ряд сходится.

Исследуем ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}$. Применим признак сравнения. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, про который известно, что он расходится, то и ряд полученный умножением ряда на константу также является расходящимся. 4n-3<4n, $\frac{1}{4n-3}>\frac{1}{4n}$. Следовательно из расходимости рядя $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ следует и расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-3}$ сходится условно.

Пример 3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$.

Решение**.** Исследуем данный знакочередующийся ряд сразу на абсолютную сходимость. С этой целью составим ряд из модулей членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Применим к этому ряду признак Даламбера:

$$a_n=\frac{n^n}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n n\cdot n!}{n^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=e\cdot 0=0$$

Т.к. 0<1, ряд сходится

Здесь использован 2-й замечательный предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$ сходится абсолютно.

Пример 4**.** Исследовать на сходимость ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots$

Решение**.** Составим ряд из модулей данного ряда:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и, следовательно, ряд сходится. Т.о. ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Практические задания

Исследовать на сходимость знакочередующий ряд**.**

1. Выпишите первые пять членов ряда
2. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующихся рядов.
3. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд

Вариант 1	Вариант 2
1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3n}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot}{2^{n+1}}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+2}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{6}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot}{3^{n+1}}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{3n}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{4n}{3}$ б) $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot}{2^n\cdot n^2}$

Вариант 5	Вариант 6
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n^2}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 3^n}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n^2$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot}{5^n}$
Вариант 7	Вариант 8
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n^2-2}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{5^n\cdot n}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^5}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^3}{3^n}$
Вариант 9	Вариант 10
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{5n-1}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{4n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}\cdot 2^n}{n!}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n^2}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n-1}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n!}$
Вариант 11	Вариант 12
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n!}$	1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^3}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 6^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$	2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!}$
Вариант 13 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n-1)!}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n!}$	Вариант 14 1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$ 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}n!}{n^4}$

Контрольные вопросы:

1. Какой ряд называется знакопеременным?
2. Какой ряд называется знакочередующимся?
3. Что называется абсолютно сходящимся рядом?
4. Что называется условно сходящимся рядом?
5. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

5 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Тема 4.7.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие №17

Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель**:** сформировать навыки решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных уравнений первого порядка.

Теоретическая часть

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Определение.Дифференциальнымуравнениемназывается уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных**.**

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Определение.Общимрешениемдифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y=f(x,C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

С геометрической точки зрения решением дифференциальных уравнений является семейство интегральных кривых.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Задача Коши

Найти решение y=y(x) уравнения y′=f(x, y), удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0, y_0) начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется задачей Коши.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными, если имеет следующий вид:

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (1)$$

Предположим, что $f_2(y) \neq 0$. Тогда уравнение можно записать так:

$$\frac{dy}{f_2(x)} = f_1(x)dx \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется уравнением с разделенными переменными.

Интегрируя почленно уравнение (2), получим общее решение уравнения (1)

$$\int \frac{dy}{f_2(x)} = \int f_1(x)dx. .$$

Алгоритм решения

1) Разделить переменные (с учетом условий, когда это можно сделать).

2) Интегрировать почленно полученное уравнение.

3) Выяснить, имеет ли уравнение решение, не получившего из общего интеграла.

4) Найти частное решение (если нужно).

2. Однородные ДУ первого порядка

Определение. Функция f(x, y) называется однородной n – го измерения относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx;ty)=t^n f(x;y)$$

Например, функция $f(x;y)=2x^3+x^2y$ является однородной третьего порядка, т.к.

$$f(tx;ty)=2(tx)^3+(tx)^2(ty)=t^3(2x^3+x^2y)=t^3 f(x;y)$$

Определение. Уравнение вида P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, (3)

где P(x, y), Q(x, y) – однородные функции хи y одинаковой степени, называется однородным дифференциальным уравнением.

Уравнение (3) можно привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (4)

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$\frac{y}{x}=u$, т.е. y=ux и y′=u′x+u

После решения полученного ДУ относительно u, нужно выразить u через x и y и решить новое ДУ с разделяющимися переменными.

3. Линейные ДУ первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x) = Q(x) \qquad (4)$$

при этом, если правая часть Q(x) равна нулю, то такое уравнение называется линейным однороднымдифференциальным уравнением, если правая часть

Q(x) не равна нулю, то такое уравнение называется линейным неоднороднымдифференциальным уравнением.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0. \qquad (5)$$

Такого типа дифференциальные уравнения можно свести к уравнениям с разделенными переменными.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,\ \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|,\ \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P(x)dx,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (Q(x)□0) применяется основном метод Бернулли. Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций **y=uv**, где u=u(x), v=v(x)—некоторые функции от x, тогда **y′=u′v+uv′**. Этот метод более подробно рассмотрен в практической части.

Практическая часть

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение: y′tgx=1+y, если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$;

Решение. Уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, где $f_1(x)=tgx$, $f_2(y)=1+y$.

$$\frac{dy}{dx}tgx = 1 + y,$$

$$\int\frac{dy}{1+y} = \int\frac{dx}{tgx},$$

$\ln|1+y|=\ln|\sin x|+C_1$,

$1+y=\sin x\, e^{C_1}$,

$y=C\sin x-1$.

Находим C, подставляя в данное равенство начальные данные условия.

$-\frac{1}{2} = C\sin\frac{\pi}{6} - 1$, C=1.

Таким образом,

y=sinx-1.

Ответ: y=sinx-1.

Пример 2**.** Решить уравнение $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$.

Решение.Заданное уравнение имеет вид (3), т.е. является однородным диф. уравнением первого порядка. Приведем его к виду (4):

$$y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0.$$

Пусть $\frac{y}{x} = u$ тогда $y = ux,\ y' = u'x + u$ и уравнение привет вид:

$$u'x + u - u + e^u = 0,\ \frac{du}{dx}x = -e^u,$$

$$e^{-u}du = -\frac{dx}{x},\ \int e^{-u}du = -\int\frac{dx}{x},$$

$$-e^{-u} = -\ln|x| - \ln|C|,\ C \neq 0\ e^{-u} = \ln|Cx|,$$

$-u = \ln\ln|Cx|$, т.к. $u = \frac{y}{x}$, то

$\frac{y}{x} = -\ln\ln|Cx|,\ y = -x\ln\ln|Cx|$, -- общее решение заданного уравнения.

Ответ: $y = -x\ln\ln|Cx|$.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2-2y^2)+2xy\frac{dy}{dx}=0$

Решение.$(x^2-2y^2)+2xy\frac{dy}{dx}=0$.

$(x^2-2y^2)dx+2xydy=0$.

В данном уравнении функции P(x, y)=x^2-2y^2, Q(x, y)=2xy – однородные второго измерения, следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Положим, y=ux, откуда:dy= udx+xdu.

Уравнение примет вид:

x^2dx-2(zx)^{2}dx+2xux(udx+xdu)=0,

x^2dx-2u^2x^2dx+2u^2x^2dx+2ux^3du=0,

dx+2uxdu=0, $2udu+\frac{dx}{x}=0$,

$\int 2udu+\int\frac{dx}{x}=C_1$, $u^2+\ln|x|=\ln|C|$, $x=Ce^{-u^2}$.

Учитывая, что u=y/x, находим общий интеграл

$x=Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

Ответ: $x=Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

Решение. Данное уравнение имеет вид (4), т.е. является линейным уравнением. Пусть

y=uv, y$'$=u$'$v+uv$'$.Тогда уравнение примет вид:

$u'v+uv'+2xuv=xe^{-x^2}$.

$u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2}$. (6)

Подберем функцию так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е.

$v'+2xv=0.\ \frac{dv}{dx}=-2xv,\ \frac{dv}{v}=-2xdx,$

Интегрируя равенство, получим

$\ln|v|=-x^2$, $v=e^{-x^2}$.

Подставим полученное решение в (6).

$u'v + 0u = xe^{-x^2}$ $\frac{du}{dx}e^{-x^2} = xe^{-x^2}$,

$du = xdx$, $u = \frac{x^2}{2} + C$.

Итак, общее решение $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$.

Ответ: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$

Практические задания

1-2-- Найти общее решение ДУ с разделяющимися переменными.

3-- Найти частное решение ДУ с разделяющимися переменными.

4--Найти общее решение однородного ДУ первого порядка.

5-- Найти общее решение линейного ДУ первого порядка.

1 вариант	**2 вариант**
1. $ydy=x^3dx$. 2. $xydy=(y^2-1)dx$ 3. $ydx+ctgxdy=0$, если y=1 при $x=\frac{\pi}{4}$. 4. $xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}$ 5. $y'+2xy=2xy^3$	1. $4y^2dx=x^2dy$. 2. $x^2dx=ydy$. 3. (1+x)ydx=(y-1)xdy, если y=1 прих=1. 4. ydx+(x+y)dy=0. 5. $y'+ycosx=sin2x$
3 вариант	**4 вариант**
1. $x^3dx=(y-1)dy$. 2. (x+3)dy=(y-1)dx. 3. $x^2dy-y^2dx=0$, если y=1 при x=0,2. 4. $y' = \frac{x+y}{x-y}$	1. $\frac{dx}{x+1} = ydy$. 2. dy+y tg xdx=0. 3. $x^2dy-\frac{1}{2}y^3dx=0$, если y=1 при x=-1.

5. $y' - 2xy = e^{x^2}$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. 5. $y' + 2y = 3e^x$.
Вариант 5 1. xdy=ydx 2. $x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ 3. y′=sin5x, y(π/2)=1 4. $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$ 5. y′+y=e^{-x}	**Вариант 6** 1. xdy=y^{4}dx 2. xyy′=1-x 3. y′=6$\sqrt{x}$ dx 4. yy′-2y+x=0 5. xy′+y=sinx
Вариант 7 1. $\frac{dy}{dx} = 3\sin x$ 2. $y' = \frac{y-1}{x+2}$ 3. x^{2}dy-dx, y(1)=2 4. $xy' + xtg\frac{y}{x} = y$ 5. y′+2xy=2x^3	**Вариант 8** 1. (2-y)dy=xdx 2. $xydy = (1+x^2)dy$ 3. $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$, если y=4 при x=0 4. (3x^2-y^2)y′=2xy 5. xy′+y=x+1
Вариант 9 1. y′-3xy=0 2. xdy+y^{3}dx=0 3. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{x}$, если y=1 при x=1. 4. 2xyy′=x^2+y^2 5. y′-ysinx=sinxcosx	**Вариант 10** 1. $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$ 2. $\sqrt{x}dy = \sqrt{y}dx$ 3. $(2x-1)dy = (y+1)dx$, если y=0 при x=1 4. x^{2}y′=y^2-xy+x^2 5. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$
Вариант 11 1. ydy=e^{x}dx 2. $(1+y)dx = (1-x)dy$ 3. $dy + ytgxdx = 0$, если y=1 при x=0. 4. (x-y)ydy-x^{2}dy=0 5. xy′+y=3	**Вариант 12** 1. x^{3}dx=(3-y)dy 2. $x(y^2-1)dx = y(2-x^2)dy$ 3. y^{2}dx=e^{x}dy, если y=1 при x=0. 4. xy^{2}y′=x^3+y^3 5. xy′-3y=x^{4}e^x

Вариант 13	**Вариант 14**
1. $\frac{dx}{x-1} = e^{2y}dy$ 2. $xydx-(2+x^2)dy=0.$ 3. $1+y^2=xy'$, $y(2)=1$ 4. $x^3dy-y(x^2+y^2)dx=0.$ 5. $xy'-y-x^3=0$	1. $y'+y=5$ 2. $x^2dy+(y-3)dx=0$ 3. $cosxsinydy=cosysinxdx$, $y(\pi)=\pi.$ 4. $x^2y'=xy+y^2$ 5. $y'-3xy=2xy^2$

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

5 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

Практическое занятие №18

Решение дифференциальных уравнений высших порядков.

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Цель работы: развить навыки решения ДУ высших порядков двух видов: уравнений, допускающих понижение порядка, и линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теоретическая часть

Определение. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^n = f\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right)$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

I. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. (1)

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2;$$

И т.д. до получения y.

II. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение y'' + p · y' + q · y = 0 , (2)

где p и q - постоянные, называется однородным линейным уравнением второго порядка.

Вид общего решения y_0 однородного линейного уравнения второго порядка зависит от корней k_1, k_2 характеристического уравнения:

$$k^2 + px + q = 0 \qquad (3)$$

1. Если k_1, k_2 - действительные числа, причем $k_1 \neq k_2$, то общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. Если k_1, k_2 - действительные числа, причем $k_1 = k_2$, то общее решение примет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + x \cdot C_2 e^{k_2 x}$
3. Если k_1, k_2 - комплексные числа, $k_{1,2} = a \pm bi$, то общее решение имеет вид: $y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

III. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

y'' + py' + qy = f(x) (4)

Общим решением уравнения (4) является сумма общего решения y_o однородного уравнения и частного решения y_* данного уравнения, т.е. **$y = y_o + y_*$.**

Частное решение y_* неоднородного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов. Рассмотрим два случая.

I случай. Если правая часть f(x) уравнения представляет собой произведение $e^{\alpha \cdot x} P_n(x)$, где α - число, $P_n(x)$ - многочлен степени n .

1. Если число α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, тогда $y_* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
2. Если число α - однократный корень характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, тогда $y_* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
3. Если число α - двукратный корень характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, тогда $y_* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

II случай. Пусть f(x) имеет вид:

$$f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos bx + R(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin bx$$

где P(x), R(x) - многочлены.

Пусть n - наибольшая степень этих многочленов. Частное решение y_* находится подбором неопределенных коэффициентов многочленов $U_n(x)$, $V_n(x)$ степени n :

1) если числа $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, тогда

$$y_* = U(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos bx + V(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin bx$$

2) если числа $a \pm ib$ - корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, тогда

$$y_* = x\left[U(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos bx + V(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin bx\right]$$

Выбрав вид частного решения y_* , соответствующий правой части f(x) дифференциального уравнения, находим y_*', y_*''

Подставив найденные для y_* , y_*' , y_*'' выражения в исходное линейное уравнение второго порядка, определяем неизвестные коэффициенты многочлена $Q_n(x)$, или многочленов U(x) и V(x) .

Практическая часть

Пример 1. Решить уравнение $y''' = \cos x$.

Решение. Интегрируя, находим

$$y'' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,$$

$$y' = \int (\sin x + C_1)dx = -\cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-\cos x + C_1 x + C_2)dx = -\sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Итак, общее решение $y = -\sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$

Ответ: $y = -\sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$

Пример 2. Решить уравнение $y'' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1; y_0'' = 0.$

Решение. Сначала находим общее решение, методом понижения порядка ДУ

$$y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x + C_2 x + C_3.$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = -\frac{5}{4}; C_3 = \frac{7}{8}.$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}.$

Ответ: $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}.$

Пример 3. Решить уравнения

а) $y''-5y'+6y=0$; б) $y''+4y'+4y=0$; в) $y''-6y'+13y=0$.

Решение. Уравнения являются однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $y''-5y'+6y=0$,

характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2-5k+6=0$, $k_1=2$, $k_2=3$.

Находим общее решение

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

б) $y''+4y'+4y=0$,

$k^2+4k+4=0$,

$k_{1,2}=-2$

$y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$

в) $y''-6y'+13y=0$,

$k^2-6k+13=0$,

$k_1=3+2i$, $k_2=3-2i$,

$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

Пример 4. Решить уравнение: $y'' + y = x$. *н*

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2+1=0;\quad k_{1,2}=\pm i$.

Тогда общее решение имеет вид: $y_0 = e^{0x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)$

$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x.$

Частное решение неоднородного ДУ ищем в виде: $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$

Получаем: $\alpha=0$, $r=0$, $Q(x)=Ax+B$.

Т.е. $y_* = Ax + B$, $y_*' = A,$, $y_*' = 0.$ $y_*'' = 0$

$Ax+B=x$, $A=1$, $B=0$; Т.о. $y_* = x.$

Общее решение ДУ имеет вид: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x.$

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x.$

Пример 5. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = 3e^x$

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; r = 2; Q(x) = C$$

$$y = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x;$$

$$y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x;$$

$$2C = 3; C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y_* = \frac{3}{2} x^2 e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 4y' + 4y = 2xe^x$

Решение. Общее решение исходного уравнения, равного сумме общего решения однородного уравнения y_0 и частного решения y_*.

1. Найдем y_0 . Находим корни характеристического уравнения:

$$k^2+4k+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=-2, \Rightarrow y_0=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

2. Найдем y_* . Так как правая часть уравнения $f(x)=2xe^x$, ($\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, степень многочлена равна одному), то частное решение y_* ищем в виде: $y_*=(Ax+B)e^x$. Находим

$$y_*^{/}=Ae^x+(Ax+B)e^x,$$

$$y_*^{//}=Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x=2Ae^x+(Ax+B)e^x.$$

Подставляя y_* , $y_*^{'}$, $y_*^{''}$ в исходное уравнение, получаем:

$$2Ae^x+(Ax+B)e^x+4Ae^x+4(Ax+B)e^x=2xe^x$$

Разделив на e^x , после приведения подобных слагаемых получим:

$6A+9Ax+9B=2x.$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 9A=2, \\ 6A+9B=0; \end{cases}$$

найдя решение этой системы: $A=\frac{2}{9}, B=-\frac{4}{27}$.

Записываем общее решение: $\Rightarrow y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{2}{9}x-\frac{4}{27}$.

Ответ: $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{2}{9}x-\frac{4}{27}$.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y^{//}-4y^{/}+13y=4\cos 3x$

Решение. Общее решение ЛНДУ имеет вид $\mathbf{y = y_o + y_*}$.

1. Найдем y_0. Решаем характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$, $k_1=2+3i, k_2=2-3i,$, следовательно, $y_0=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

2. Найдем частное решение y_*. Правая часть ЛНДУ имеет вид $f(x)=e^{0x}(4\cos 3x+0\cdot\sin 3x)$, т.е. $\alpha=0,\beta=3,\alpha+\beta i=3i$ не совпадает с корнем характеристического уравнения, то r=0. Тогда частное решение находи в виде $y_*=A\cos 3x+B\sin 3x$.

$(y_*)'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x,\qquad (y_*)''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x.$

Подставляя в уравнение, получаем

$-9A\cos 3x-9B\sin 3x-4(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+13(A\cos 3x+B\sin 3x)=4\cos 3x$

Упрощаем $(-9A-12B|+13A)\cos 3x+(-9B+12A+13B)\sin 3x=4\cos 3x+0\sin 3x$.

Решаем систему уравнений:

$\begin{cases}4A-12B=4,\\12A+4B=0;\end{cases}$ A=0,1, B=-0,3.

Следовательно, $y_*=0{,}1\cos 3x-0{,}3\sin 3x$.

Общее решение $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+0{,}1\cos 3x-0{,}3\sin 3x$

Ответ: $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+0{,}1\cos 3x-0{,}3\sin 3x$

Практические задания

1. Решите уравнение методом понижения порядка
2. Найдите частное решение ДУ.
3. Решите однородное ДУ второго порядка.
4. Найдите общее решение неоднородного ДУ второго порядка.
5. Найдите общее решение неоднородного ДУ второго порядка.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y'''=27\sin(3x-5)+4$ 2. $y''=2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 3. $y''+4y'-3y=0$	1. $y'''=16\cos 2x$ 2. $y''=6x^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$ 3. $y''-6y'+9=0$

4. $y''-2y'+y=2x$ 5. $y''-y'-6y=\sin 2x$	4. $y''-3y'+2y=10e^{-x}$ 5. $y''-3y'-4y=\cos 4x$
Вариант 3 1. $y'''=48x^2-3$ 2. $y''=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 3. $y''-4y'+3y=0$ ‘ 4. $y''-7y'+6y=\sin x$ 5. $y''-2y'-3y=e^{4x}$	Вариант 4 1. $y''=24x-6$ 2. $y''=\frac{1}{x}$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$ 3. $y''+4y'=0$ 4. $2y''+5y'=2\cos x$ 5. $y''-7y'+6y=\sin x$
Вариант 5 1. $y'''=\sin 2x$ 2. $y''=e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 3. $y''+6y'+9y=0$ 4. $y''-2y'-8y=2\sin 2x$ 5. $y''-5y'+6y=6x^2$	Вариант 6 1. $y'''=81\sin 3x$ 2. $y''=\frac{2}{x}$, $y(1)=4$, $y'(1)=1$ 3. $y''+y'+y=0$ 4. $y''+25y'=\cos 5x$ 5. $y''-y'-12y=x-5$
Вариант 7 1. $y'''=32\cos 2x$ 2. $y''=e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 3. $2y''-3y'+y=0$ 4. $y''+7y'+6y=\cos x$ 5. $y''-6y=x^2-x$	Вариант 8 1. $y'''=2\cos(2x-1)$ 2. $y''=x-3$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ 3. $y''-2y'+2y=0$ 4. $y''-y'-6y=3\sin x$ 5. $y''-y'=e^{-2x}$
Вариант 9 1. $y'''=12\sin(3x+4)$ 2. $y''=e^{-x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=2$ 3. $y''+3y'+y=0$ 4. $y''-2y'-8y=e^{2x}$ 5. $y''+9y=6\cos 2x$	Вариант 10 1. $y'''=9\cos 2x-2$ 2. $y''=2-x$, $y(1)=0$, $y'(0)=2$ 3. $y''-6y'+45y=0$ 4. $y''+2y'+5y=\cos 2x$ 5. $y''-2y'-35y=xe^{x}$
Вариант 11 1. $y'''=64\cos 4x+5x$ 2. $y''=3^x+1$, $y(0)=3$, $y'(0)=4$ 3. $y''+y'+y=0$ 4. $y''+y'-20y=e^{-2x}$ 5. $y''+8y=\sin 4x$	Вариант 12 1. $y'''=125\sin 5x+3$ 2. $y''=-2^x-1$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ 3. $y''+4y'+8y=0$ 4. $y''-8y'+16y=4\sin x$ 5. $y''-5y'+4y=x^2-3x$

Вариант 13	Вариант 14
1. $y'''=36\cos 6x-3x^2$ 2. $y''=4x-1$, $y(1)=3$, $y'(1)=2$ 3. $y''-2y'+y=0$ 4. $y''-7y'+10y=4e^{3x}$ 5. $y''-3y'=\sin 5x$	1. $y'''=100\sin 10x+x$ 2. $y''=5^x+2$, $y(0)=4$, $y'(0)=1$ 3. $y''+2y'+5y=0$ 4. $y''-7y'=x-2$ 5. $y''+8y'+7y=-\cos 3x$

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциальным уравнением n-го порядка?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка? Алгоритм решения таких уравнений.
3. Какой вид имеет линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Что такое характеристическое уравнение?
5. Какой имеет вид общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения: а) действительные и различные; б) действительные и равные? в) комплексные сопряженные?

Какой имеет вид общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

Критерий оценки

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

5 заданий		отлично
4 заданий		хорошо
		удовлетворительно
менее 3 заданий		неудовлетворительно

Время выполнения 60 мин

4.Контрольно-оценочные материалы для промежуточной аттестации по учебной дисциплине –Элементы высшей математики

Экзамен в соответствии с учебным планом 2026 года по дисциплине ОП 01 «Элементы высшей математики» проводится в конце четвертого семестра в виде **тестирования**. Работа состоит из 10 заданий.

Зачет рассчитан на 90 мин.

Порядок проведения зачета предусматривает следующие этапы:

- Постановка учебных целей и задач проведения экзамена;
- Объяснение заданий и требований к их оформлению, критерий оценки;
- Выполнение работы;

Проверяемые ОК и ПК

ОК.01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК.02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК.03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях

ОК.04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК.05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК.06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

Банк заданий для проведения экзамена

Задание 1. Найти сумму и разность комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 - i$;
2) $z_1 = 2 + 3i; z_2 = 3 - 4i$,
3) $z_1 = 3 + i; z_2 = 3 - i$,
4) $z_1=4-3i, \quad z_2=-3+6i.$
5) $z_1=-12+2i, \quad z_2= 3+4i$
6) $z_1=12-5i, \quad z_2=-3+11i.$
7) $z_1= 14+i, \quad z_2=-1-2i.$
8) $z_1= 4-2i, \quad z_2=3+2i.$
9) $z_1= 7+2i, \quad z_2=2-8i.$
10) $z_1= -10+3i, \quad z_2=1+2i.$

Задание 2 Найти произведение комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 - i$, 2) $z_1 = 3 + i; z_2 = 3 - i$. 3) $z_1 = 2 - i; z_2 = 3 + i$

Найти частное комплексных чисел:

6) $z_1 = 1+2i; z_2 = 5+3i$, 7) $z_1 = 2+3i; z_2 = 3+7i$, 8) $z_1 = 2+3i; z_2 = 3-4i$.

Задание 3. А) Вычислить $A+\frac{1}{a}B$

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, a=2

2. $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -4 & 12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -12\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, a=3

b) Вычислить 1. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Задание 4) Вычислите определитель

1. $\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix}-1 & 3 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 3\end{vmatrix}$

Задание 5 Найдите предел

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x-2}{3x^3+6x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-3x+4}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2-1}{5x^3+x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{9}{x})^x$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x-1}{6x^5-6x+4}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^2-4}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^3+2x}$

Задание 6.

Найдите дифференциал функции

1) $y=4x\ln 5x$ 2) $y=\frac{x^2-3}{x+2}$ 3) $y=4^{\sin x}$

Задание 7 Вычислите интеграл

1. $\int_{-1}^{2}(5x^4-3)dx$ 2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$ 3. $\int_{2}^{4}(3x-7)dx$

Задание 8

1Скорость движения точки изменяется по закону $v=(t^2+5t-3)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2+2t-1)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5-ю секунду.

Задание 9 Найдите частные производные функции 2-х переменных

1. $z=3x^2y-x^4y^2+2x-y+1$ 2. $z=4x^3y^2+3x-y^2+1$

Задание 10

1) Найти общее решение ДУ с разделяющимися переменными $4y^2dx=x^2dy$

2) . Найти общее решение ДУ с разделяющимися переменными $(x+3)dy=(y-1)dx$

Задание 11

Найдите общее решение линейного однородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

1) $y''+4y'-3y=0$ 2) $y''-6y'+9=0$ 3) $y''+4y'=0$ 4) . $y''+2y'+5y=0$

Задание 12

Решите линейное ДУ первого порядка

1) $y'+2y=3e^x$ 2) . $y'+2y=3e^x$ 3) . $y'+2xy=2x^3$

Задание 13

1) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-1, y=x+1$

2) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{5}{x}, y=6-x$

3) . Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}, x=1, x=2, y=0$.

4) Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.

Задание 14

Вычислить двойной интеграл:

a. $\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{4}2ydy$

b. $\int_{0}^{1}dy\int_{1}^{2}2xy^2dx$

c. $\int_1^3 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin\, y dy$

d. $\int_1^3 dy \int_1^2 (x+4y)dx$

e. $\int_{-2}^2 dx \int_0^2 (2x+3)dy$

f. $\iint_D (x^2+2y)dxdy,\ D: x=0,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ y=2$

g. $\iint_D (x+3y)dxdy,\ D: y=x^2, x=0, y=2$

Демонстрационный вариант

ГБПОУ РО «Ростовский-на-Дону колледж связи и информатики»

«РАССМОТРЕНО» на заседании ЦК МиЕНД Протокол № 2026г. Председатель ЦК _____М.Ш. Джалагония	Дифференцированный зачет по дисциплине «ОП.01 Элементы высшей математики» для специальности **09.02.13 Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта**2 курс, 3 семестр	«УТВЕРЖДАЮ» Зам. директора по УМР _____И.В.Подцатова «___»_____2026г.

№	Задание	ответ
1)	Найти сумму и разность комплексных чисел: $z_1 = 2+i; z_2 = 3-i$;	
2)	Вычислить $A+\frac{1}{a}B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,	

	$B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, a=2	
3)	Найдите предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$	
4) 1	Найдите дифференциал функции: $y=x^2\ln 2x$	
5)	Найдите неопределенный интеграл с помощью замены переменной $\int e^{-2x+6}dx$	
6)	Найдите частные производные функции 2-х переменных $z=3x^2y-x^4y+2x-y+$	
7)	Найти общее решение ДУ с разделяющимися переменными $xydy=(y^2-1)dx$	
8)	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-1, y=x+$	
9)	Вычислить двойной интеграл: $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^4 2ydy$	
10)	Найдите общее решение линейного однородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами: $y^{//}-6y^{/}+9=0$	

«__» _____2026. Преподаватель_____

Критерии оценки

Шкала оценки образовательных достижений

Количество правильно выполненных заданий	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог

заданий		отличноо
8-7 заданий		хорошо
6-5 заданий		удовлетворительно
менее 5 заданий		неудовлетворительно

Лист согласования

Дополнения и изменения к комплекту ФОС на учебный год

Дополнения и изменения к комплекту ФОС на _____ учебный год по дисциплине _____

В комплект ФОС внесены следующие изменения:

_____

_____

_____

_____

_____

Дополнения и изменения в комплекте ФОС обсуждены на заседании ЦК _____

«_____» _____ 20_____г. (протокол № _____).

Председатель ЦК _____ /_____/